Diplomarbeit

Rationale (p, p)-Klassen in der Kohomologie komplexer abelscher Varietäten

ausgeführt von

Johann Schuster

an der

Naturwissenschaftlichen Fakultät I
-Mathematik-

der Universität Regensburg

unter Anleitung von

Prof. Dr. Klaus Künnemann

27. November 2004

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Sei V ein g-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, $\Lambda \subset V$ ein Gitter in V und $X = V/\Lambda$ eine g-dimensionale komplexe abelsche Varietät.
Bezeichne $H^i_{sing}(X, R)$ die i-te singuläre Kohomologiegruppe von X mit Koeffizienten im Ring R. Sei $H^i_{DR}(X, \mathbb{R})$ die i-te reelle De Rham Kohomologiegruppe und $H^i_{DR}(X, \mathbb{C}) := H^i_{DR}(X, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ die i-te komplexe De Rham Kohomologiegruppe.
Es existiert ein Isomorphismus

$$H^i_{sing}(X, \mathbb{C}) \simeq H^i_{DR}(X, \mathbb{C}).$$

Die algebraische Topologie liefert eine Inklusion

$$H^i_{sing}(X, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^i_{sing}(X, \mathbb{C}),$$

deren Bilder als *rationale Kohomologieklassen* bezeichnet werden.
Es existieren zwei verschiedene Strukturen auf $H^i_{sing}(X, \mathbb{C}) \simeq H^i_{DR}(X, \mathbb{C})$, die für folgende Arbeit von Bedeutung sind:

- Die rationale Struktur durch $H^i_{sing}(X, \mathbb{Q})$, die von der Topologie auf X bestimmt wird.
- Die Hodge-Zerlegung $H^i_{DR}(X, \mathbb{C}) = \oplus_{p+q=i} H^{p,q}(X)$ in (p, q)-Klassen.

Das Studium algebraischer Zykel führt zur Betrachtung rationaler (p,p)-Klassen, das heißt: Elemente des Schnittes

$$H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(X) := H^{2p}_{sing}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(X).$$

Dieser Schnitt wird in $H^{2p}_{sing}(X, \mathbb{C}) \simeq H^{2p}_{DR}(X, \mathbb{C})$ gebildet:

$$\begin{tikzcd}
& H^{2p}_{sing}(X, \mathbb{C}) \arrow[r, "\simeq"] & H^{2p}_{DR}(X, \mathbb{C}) & \\
H^{2p}_{sing}(X, \mathbb{Q}) \arrow[ur, hook] & & & H^{p,p}(X) \arrow[ul, hook']
\end{tikzcd}$$

Die algebraische Toplogie liefert einen Isomorphismus

$$\wedge^{2p} H^1(X, \mathbb{Q}) \simeq H^{2p}(X, \mathbb{Q}).$$

Da ein p-faches Produkt von $(1,1)$-Formen eine (p,p)-Form ergibt, erhalte die Inklusion

$$\wedge^p H^{1,1}(X) \subseteq H^{p,p}.$$

Insgesamt gilt für rationale (p,p)-Klassen:

$$\wedge^p H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(X) \subseteq H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(X). \tag{1.1}$$

Es stellt sich die Frage, ob und wann schon

$$H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(X) = \wedge^p H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(X) \tag{1.2}$$

gilt.
Im Falle der Gleichheit folgt mit Hilfe des Lefschetz $(1,1)$-Theorems auch die berühmte Hodge (p,p)-Vermutung für X.

Folgende beiden Sätze sind das Resultat der Arbeit:
Dem Artikel [9] von Murasaki folgend ergibt sich ein positives Resultat für das n-fache Produkt einer elliptischen Kurve:

Satz 1.0.1. Sei E eine elliptische Kurve, so gilt für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ und das n-fache Produkt E^n von E:

$$H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(E^n) = \wedge^p H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(E^n).$$

In diesem Fall ist also auch die Hodge-Vermutung bewiesen. Leider folgt die Hodge-Vermutung auf diese Weise nicht für alle abelschen Varietäten. Einem Gegenbeispiel von Mumford folgend, wird eine ablesche Varietät konstruiert, für die Gleichung (1.2) nicht gilt:

Satz 1.0.2. Es gibt eine abelsche Varietät X, $dim_{\mathbb{C}} X = 4$, für die Gleichung (1.1) eine echte Inklusion ist:

$$\wedge^p H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(X) \subsetneq H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(X).$$

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt:
Die Kapitel 2 bis 6 sind eine Hinführung zu den Hauptsätzen, Kapitel 7 und 8 liefern Beispiele abelscher Varietäten, für die Gleichung (1.2) gilt bzw. nicht gilt.

- In Kapitel 2 erfolgt eine Wiederholung der Darstellungstheorie kommutativer halbeinfacher Algebren. Wichtiges Resultat ist die Zusammensetzung einer rationalen Darstellung aus irreduziblen Darstellungen. Dies wird in Kapitel 4 verwendet.

- In Kapitel 3 wird die Algebra $End_{\mathbb{Q}}(X)$ definiert und deren rationale und analytische Darstellung eingeführt. Es endet mit einem Satz zur Äquivalenz zwischen der rationalen Darstellung und der direkten Summe der analytischen Darstellung und ihrer komplex Konjugierten.

- Das Kapitel 4 definiert nach einer kurzen Wiederholung zahlentheoretischer Fakten eine abelsche Varietät X mit komplexer Multiplikation. Sätze aus den Kapiteln 2 und 3 werden zur Wahl einer geeigneten Basis $X \simeq \mathbb{C}^n/\Lambda$ verwendet, die in Kapitel 6 zur Berechnung der Kohomologie benötigt wird. Das Kapitel schließt mit einem in Kapitel 7 verwendeten Kriterium für elliptische Kurven mit komplexer Multiplikation.

- Kapitel 5 liefert ein Konstruktionsverfahren für abelsche Varietäten mit komplexer Multiplikation. Dazu wird zunächst ein geeigneter komplexer Torus konstruiert. Der Approximationssatz aus der Bewertungstheorie gewährleistet die Existenz einer Riemann-Form auf einem solchen Torus. Kapitel 8 benötigt eine auf diese Weise konstruierte abelsche Varietät.

- In Kapitel 6 erfolgt die Charakterisierung rationaler (p,p)-Klassen. Es ist zweigeteilt: Im ersten Teil erfolgt der Zugang via De Rham Kohomologie für beliebige komplexe abelsche Varietäten. Dieser Zugang wird in Kapitel 7 verwendet. Der zweite Teil behandelt die singuläre Kohomologie im Fall abelscher Varietäten mit komplexer Multiplikation. Diese Charakterisierung wird in Kapitel 8 benutzt.

- In Kapitel 7 wird Gleichung (1.2) für das n-fache Produkt einer elliptischen Kurve E durch explizite Rechnungen mit Differentialformen bewiesen. Dieses Kapitel behandelt Murasaki's Ausführungen in [9]. Ein wesentlicher Punkt im Beweis ist die konsequente Unterscheidung zwischen den Fällen mit und ohne komplexer Multiplikation. Ich korrigiere einen kleinen Fehler im Beweis von Lemma 7.2.9, da Murasaki einen falschen Koeffizienten für $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_3 \wedge dy_4$ verwendet. Ich verwende noch zusätzlich die Koeffizienten von $dx_1 \wedge dy_2 \wedge dx_3 \wedge dy_4$ und $dx_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \wedge dx_4$. Aus der Summe dieser Koeffizienten ergibt sich ein symmetrischer Ausdruck und der Widerspruchsbeweis folgt, wie von Murasaki gewünscht.

- In Kapitel 8 wird nach einem Gegenbeispiel von Mumford, veröffentlicht in [11], eine abelsche Varietät mit komplexer Multiplikation konstruiert, für die Gleichung (1.2) nicht gilt. Ich habe hier versucht, die Grundidee klar herauszustellen und die vielfachen Identifikationen besser zu erklären. Auch habe ich die CM-Eigenschaft des in diesem Kapitel konstruierten Körpers F explizit gezeigt.

Kapitel 2

Darstellungen halbeinfacher Algebren

In diesem Kapitel werden einige Fakten über halbeinfache kommutative Algebren und ihre Darstellungen - meist ohne Beweis - aufgezeigt. Wichtigstes Resultat ist Lemma 2.4.1, das in Bemerkung 4.2.3 Verwendung findet.

2.1 Definitionen

In diesem Kapitel bezeichne mit einem *Ring* immer einen *kommutativen Ring mit 1*.

Definition 2.1.1. Seien A, B Ringe, $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $f(A) \subseteq B$. Somit wird B zu einem A-Modul via

$$\begin{array}{rccc} \iota : & A \times B & \to & B \\ & (a,b) & \mapsto & f(a)b. \end{array}$$

Erhalte aus der Multiplikation $B \times B \to B$ eine A-bilineare Abbildung. Nenne (B, f) oder, falls f klar, B eine A-Algebra.
Eine *Unteralgebra* C von B ist ein Unterring von B, für den gilt

$$\iota(A, C) \subseteq C.$$

Definition 2.1.2. Sei $K \supseteq k$ eine Körpererweiterung, A eine k-Algebra und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Eine K-Darstellung (ρ, V) der Algebra A ist ein k-Algebren Homomorphismus

$$\rho : A \to End_k(V)$$

bzw. nach Basiswahl in V ein k-Algebren Homomorphismus

$$\rho : A \to Mat_n(K).$$

Nenne $dim_K V = n$ den *Grad der Darstellung*. Zwei Darstellungen (ρ_1, V), (ρ_2, V) heißen *äquivalent*, in Zeichen $\rho_1 \simeq \rho_2$, falls eine Matrix B existiert, so dass für alle $\alpha \in A$ die Matrizen $\rho_1(\alpha)$ und $\rho_2(\alpha)$ durch B konjugiert sind:

$$\rho_1(\alpha) = B\rho_2(\alpha)B^{-1}.$$

Bemerkung 2.1.3. Eine Darstellung (ρ, V) einer k-Algebra A definiert eine Operation von A auf V:

$$\begin{array}{ccc} A \times V & \to & V \\ (a, v) & \mapsto & (\rho(a))(v). \end{array}$$

Bezeichne diese Operation ebenfalls mit ρ.

Definition 2.1.4. Sei (ρ, V) eine Darstellung der k-Algebra A und $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Falls W unter der Operation ρ von A invariant ist, so nenne (ρ, W) eine Unterdarstellung von (ρ, V).
Eine Darstellung (ρ, V) heißt *reduzibel*, falls es eine echte Unterdarstellung (ρ, W), $0 \neq W \subsetneq V$ gibt, andernfalls *irreduzibel*.
Eine Darstellung (ρ, V) heißt *vollständig reduzibel*, falls irreduzible Unterdarstellungen (ρ, W_i) existieren mit

$$V = \bigoplus_i W_i.$$

2.2 Irreduzible Darstellungen

Lemma 2.2.1. Die irreduziblen Dastellungen einer kommutativen Algebra sind vom ersten Grad.

Beweis. [13] §14.3 □

Bemerkung 2.2.2. Sei A eine kommutative k-Algebra, $K \supseteq k$. Die K-Darstellungen vom ersten Grad entsprechen nach Definition 2.1.2 den k-Homomorphismen von A nach K.
Insbesondere ist die Anzahl der irreduziblen Dastellungen einer kommutativen Algebra gleich der Anzahl der verschiedenen k-Homomorphismen von A nach K.

Korollar 2.2.3. Sei F ein algebraischer Zahlkörper $[F : \mathbb{Q}] = n$, aufgefasst als $\mathbb{Q}$-Algebra. Es gibt genau n irreduzible $\mathbb{C}$-Darstellungen von F, nämlich die Einbettungen $\varphi_i : F \to \mathbb{C}$.

Beweis. Da $char(\mathbb{Q}) = 0$ und $F \supseteq \mathbb{Q}$ endlich, folgt Separabilität, also existieren $[F : \mathbb{Q}] = n$ Einbettungen nach $\mathbb{C}$. Die Behauptung folgt dann mit Bemerkung 2.2.2. □

2.3 Darstellungen halbeinfacher Algebren

Definition 2.3.1. Eine k-Algebra $A \neq 0$ heißt *einfach*, falls sie keine anderen Unteralgebren als A und 0 hat.
Eine k-Algebra A heißt *halbeinfach*, falls

$$A = \bigoplus_{i \in I} A_i$$

eine direkte Summe einer Familie einfacher Algebren A_i ist.

Lemma 2.3.2. Jede K-Darstellung einer halbeinfachen k-Algebra A ist vollständig reduzibel, also äquivalent zu einer direkten Summe irreduzibler K-Darstellungen.

Beweis. [13] §14.2 □

2.4 Zusammensetzung einer rationalen Darstellung

Folgendes Lemma ist fundamental für die Theorie der abelschen Varietäten mit jeglicher Endomorphismenstruktur, also insbesondere für Varietäten mit komplexer Multiplikation.

Lemma 2.4.1. Sei A eine halbeinfache kommutative $\mathbb{Q}$-Algebra und ρ_r eine $\mathbb{Q}$-Darstellung von A. Erhalte daraus die $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$-Darstellung $\rho_r \otimes 1$. Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ die verschiedenen irreduziblen $\mathbb{C}$-Darstellungen von A, so gilt:

$$\rho_r \otimes 1 \simeq \bigoplus_{1}^{n} m\varphi_i$$

für ein $m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Mit Lemma 2.3.2 folgt nach Umordnung die Äquivalenz der Darstellungen

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_1\end{matrix}}_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{\begin{matrix}\varphi_n & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_n\end{matrix}}_{m_n} \end{pmatrix} \simeq \rho_r \otimes 1$$

Zu zeigen bleibt lediglich $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = m$. Setze

$$m_i\varphi_i := \underbrace{\varphi_i \oplus \cdots \oplus \varphi_i}_{m_i\text{-mal}},$$

so existiert nach Definition der Äquivalenz von Darstellungen eine Matrix B, so dass für alle $\alpha \in A$ gilt:

$$\rho_r \otimes 1(\alpha) = B \bigoplus_{i=1}^{n} m_i\varphi_i(\alpha) B^{-1}.$$

Aus der Multiplikativität der Determinante folgt die Gleichheit der charakteristischen Polynome konjugierter Matrizen, es gilt also:

$$P_{\rho_r\otimes 1(\alpha)}(t) = P_{\bigoplus m_i\varphi_i(\alpha)}(t) = (t - \varphi_1(\alpha))^{m_1} \cdots (t - \varphi_n(\alpha))^{m_n}.$$

Für einen Automorphismus $f \in Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$, $M \in Mat_n(\mathbb{C})$ gilt

$$P_{fM}(t) = fP_M(t), \tag{2.1}$$

wobei f auf den Matrixelementen beziehungsweise den Polynom-Koeffizienten operiert, siehe [4] Chapter XIV §3. Also folgt:

$$\begin{array}{rrcl} & P_{\rho_r\otimes 1(\alpha)}(t) & \overset{Vor.}{=} & P_{\bigoplus m_i\varphi_i(\alpha)}(t) \\ \Rightarrow & fP_{\rho_r\otimes 1(\alpha)}(t) & = & fP_{\bigoplus m_i\varphi_i(\alpha)}(t) \\ \overset{Gl.\ 2.1}{\Leftrightarrow} & P_{f(\rho_r\otimes 1(\alpha))}(t) & = & P_{f(\bigoplus m_i\varphi_i(\alpha))}(t) \end{array}.$$

Da $\rho_r \otimes 1(\alpha) \in Mat_n(\mathbb{Q})\ \forall \alpha \in F$ gilt:

$$f(\rho_r \otimes 1(\alpha)) = \rho_r \otimes 1(\alpha)\ \forall \alpha \in F.$$

Da f Automorphismus, ist seine Operation auf den φ_i transitiv, somit gilt:

$$f\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_1\end{matrix}}_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{\begin{matrix}\varphi_n & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_n\end{matrix}}_{m_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix}\varphi_{\sigma(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_{\sigma(1)}\end{matrix}}_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{\begin{matrix}\varphi_{\sigma(n)} & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_{\sigma(n)}\end{matrix}}_{m_n} \end{pmatrix}.$$

für ein passendes, von f induziertes $\sigma \in S_n$.
Es folgt für die charakteristischen Polynome:

$$(t - \varphi_1(\alpha))^{m_1} \cdots (t - \varphi_n(\alpha))^{m_n} = (t - \varphi_{\sigma(1)}(\alpha))^{m_1} \cdots (t - \varphi_{\sigma(n)}(\alpha))^{m_n}$$

Da $f \in Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ beliebig, kann f so gewählt werden, dass f jedes vorgegebene $\sigma \in S_n$ induziert. Folglich gilt $m_1 = \cdots = m_n = m$. $\square$

Kapitel 3

Endomorphismen und Darstellungen

Für eine komplexe abelsche Varietät X wird in diesem Kapitel die $\mathbb{Q}$-Algebra $End_{\mathbb{Q}}(X)$ der mit $\mathbb{Q}$ tensorierten Endomorphismen von X studiert. Die Äquivalenz der rationalen Darstellung zur direkten Summe der analytischen Darstellung und ihrer komplex konjugierten Darstellung wird zitiert.

3.1 Darstellungen von Homomorphismen komplexer abelscher Varietäten

Definition 3.1.1. Sei V ein g-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Seien $v_1, \ldots, v_{2g}$ $\mathbb{R}$-linear unabhängige Vektoren in V. Ein *Gitter* $\Lambda \subseteq V$ ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang $2g$ der Form:

$$\Lambda = v_1\mathbb{Z} + \cdots + v_{2g}\mathbb{Z}.$$

Ein *komplexer Torus* X ist der Quotient $X := V/\Lambda$ aus einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V und einem Gitter Λ in V.

Bemerkung 3.1.2. Ein komplexer Torus $X = V/\Lambda$ trägt vermöge der Projektion $V \to X$ die Struktur einer g-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit.

Sei nun $X = V/\Lambda$ ein g-dimensionaler komplexer Torus.

Lemma 3.1.3. Sei $f \in End(X)$. Es gibt eine eindeutige $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$F : V \to V \textit{ mit } F(\Lambda) \subseteq \Lambda,$$

die f induziert.

Beweis. [7] Chapter 1 §2 Proposition (2.1). □

Bemerkung 3.1.4. Die Endomorphismen von X bilden mit der punktweisen Addition von Homomorphismen eine abelsche Gruppe. Mit den Bezeichnungen aus Lemma 3.1.3 erhalte einen injektiven Gruppenhomomorphismus:

$$\begin{array}{rcl} \rho_a : End(X) & \hookrightarrow & Hom_{\mathbb{C}}(V, V) \\ f & \mapsto & F, \end{array}$$

genannt die *analytische Darstellung.*
Die Abbildungen F in der analytischen Darstellung bilden nach Satz 3.1.3 das Gitter Λ auf sich selbst ab. Erhalte durch die Einschränkung von F auf das Gitter Λ eine $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung F_Λ, die f wieder eindeutig bestimmt. Es ergibt sich ein weiterer injektiver Gruppenhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \rho_r : End(X) & \hookrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \Lambda) \\ f & \mapsto & F_\Lambda, \end{array}$$

genannt die *rationale Darstellung.*

Begründung. Noch zu zeigen: ρ_r injektiv. Ein Element $\alpha \in Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \Lambda)$ kann nach Wahl einer Basis von Λ als Matrix mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten aufgefasst werden. Die Matrizen $(\delta_{ij})_{i,j}$ bilden eine $\mathbb{Z}$-Basis der Matrizenringe mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten, also ist $Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \Lambda)$ nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen endlich erzeugt, siehe [4] Chapter III §7 Theorem 7.1. Die Torsionsfreiheit ist klar, insgesamt ist $Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \Lambda)$ also flach nach [4] Chapter XVI §3 Proposition 3.2 und die Abbildung $\iota' : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ induziert

$$\iota : Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \Lambda) \overset{kan.}{\simeq} Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \Lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \hookrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \Lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}.$$

Die kanonischen Isomorphismen

$$Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \Lambda) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}) \simeq Hom_{\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}}(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}, \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}) \simeq Hom_{\mathbb{C}}(V, V)$$

liefern das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} End(X) \arrow[r, "\rho_r"] \arrow[dr, hook, "\rho_a"'] & Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \Lambda) \arrow[d, hook, "\iota"] \\ & Hom_{\mathbb{C}}(V, V) \end{tikzcd}$$

und somit auch die Injektivität von ρ_r. $\square$

3.2 $End_{\mathbb{Q}}(X)$ und Darstellungen

Sei $End_{\mathbb{Q}}(X) := End(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ vorerst als abelsche Gruppe gegeben. Versehe die Gruppe $End_{\mathbb{Q}}(X)$ zunächst mit einer Ring-, dann mit einer $\mathbb{Q}$-Algebra-Struktur. Die Ringstruktur von $End_{\mathbb{Q}}(X)$ ist zunächst nicht kommutativ. In Kapitel 4 wird aber dann der kommutative Fall behandelt.
Nach folgender Bemerkung reicht es, nachfolgend statt $End(X)$ nur $End_{\mathbb{Q}}(X)$ zu betrachten, da eine Injektion $End(X) \hookrightarrow End_{\mathbb{Q}}(X)$ existiert:

Bemerkung 3.2.1. Es gibt eine kanonische injektive Abbildung

$$\iota : End(X) \hookrightarrow End_{\mathbb{Q}}(X),$$

die $End(X)$ mit $\iota(End(X)) \subseteq End_{\mathbb{Q}}(X)$ identifiziert.

Begründung. Der Gruppe $End(X)$ ist endlich erzeugt und torsionsfrei als $\mathbb{Z}$-Modul nach [7] Chapter 1 §1 Proposition (2.2) und somit auch flach laut [4] Chapter XVI §3 Proposition 3.2, deshalb induziert $\iota' : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ den injektiven Homomorphismus:

$$\begin{array}{rcccccc} \iota: & End(X) & \overset{kan.}{\simeq} & End(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} & \hookrightarrow & End_{\mathbb{Q}}(X) \\ & f & = & f \otimes 1 & \mapsto & f \otimes 1 & . \end{array}$$

□

Bemerkung 3.2.2. Die abelsche Gruppe $End_{\mathbb{Q}}(X)$ wird mit der durch

$$\begin{array}{ccc} End_{\mathbb{Q}}(X) \times End_{\mathbb{Q}}(X) & \to & End_{\mathbb{Q}}(X) \\ (f \otimes k, h \otimes l) & \mapsto & (f \circ h) \otimes (k \cdot l) \end{array}$$

gegebenen Multiplikation zu einem Ring und mit der Einbettung

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & End_{\mathbb{Q}}(X) \\ q & \mapsto & id_X \otimes q \end{array}$$

zu einer $\mathbb{Q}$-Algebra. Nach [6] Chapter 1 §1 Theorem 1.3 ist $End_{\mathbb{Q}}(X)$ halbeinfach.

Bemerkung 3.2.3. Ein Element $h \in End_{\mathbb{Q}}(X)$ lässt sich immer als $h = f \otimes q$ mit $f \in End(X)$, $q \in \mathbb{Q}$ schreiben.

Begründung. Setze

$$h = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes q_i \overset{\text{gem. Nenner}}{=} \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes z_i/k = (\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot f_i) \otimes 1/k =: f \otimes q.$$

□

Lemma 3.2.4. Die rationale und die analytische Darstellung setzen sich zu Darstellungen von $End_{\mathbb{Q}}(X)$ (im Sinne von Kapitel 2) fort:

$$\begin{array}{rccl} \rho_a: & End_{\mathbb{Q}}(X) & \hookrightarrow & Hom_{\mathbb{C}}(V, V) \\ & f \otimes q & \mapsto & F \cdot q \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \rho_r: & End_{\mathbb{Q}}(X) & \hookrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \Lambda) \otimes_Z \mathbb{Q} \\ & f \otimes q & \mapsto & F_\Lambda \otimes q \end{array}$$

Bezeichne diese wiederum als *analytische* und *rationale Darstellung*.

Beweis. Erhalte die Abbildungen als Eigenschaft des Tensorprodukts. Injektivität folgt, da $\mathbb{Q}$ flach als $\mathbb{Z}$-Modul. □

Bemerkung 3.2.5. Konkret gilt:

- ρ_r ist eine $\mathbb{Q}$-Darstellung von $End_{\mathbb{Q}}(X)$ vom Grad $2g$.

- ρ_a ist eine $\mathbb{C}$-Darstellung von $End_{\mathbb{Q}}(X)$ vom Grad g.

Satz 3.2.6. Die erweiterte rationale Darstellung

$$\rho_r \otimes 1 : End_{\mathbb{Q}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \to End_{\mathbb{C}}(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C})$$

ist als $\mathbb{C}$-Darstellung äquivalent zur direkten Summe der analytischen Darstellung und der komplex konjugierten analytischen Darstellung:

$$\rho_r \otimes 1 \simeq \rho_a \oplus \overline{\rho_a} \quad .$$

Beweis. [7] Chapter 1 §2 Proposition (2.3) □

Kapitel 4

Komplexe Multiplikation

4.1 Zahlentheorie

Definition 4.1.1. Ein *algebraischer Zahlkörper* F ist eine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.
Ein Element eines algebraischen Zahlkörpers heißt *ganz*, falls es Nullstelle eines normierten Polynoms $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ist. Bezeichne mit $\mathcal{O}_F$ den Ring der ganzen Zahlen in F.

Definition 4.1.2. Sei F ein algebraischer Zahlkörper, $[F : \mathbb{Q}] = g$. Eine *Ordnung* von F ist ein Teilring $\mathcal{O}$ von $\mathcal{O}_F$, der eine $\mathbb{Z}$-Basis der Länge g besitzt.

Bemerkung 4.1.3. Der Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}_F$ eines algebraischen Zahlkörpers F, $[F : \mathbb{Q}] = g$, besitzt immer eine $\mathbb{Z}$-Basis der Länge g, genannt Ganzheitsbasis. Deshalb nennt man $\mathcal{O}_F$ auch die *Hauptordnung* von F.

Begründung. [10] Kapitel I §2 Satz 2.10. □

Definition 4.1.4. Sei F ein algebraischer Zahlkörper, $[F : \mathbb{Q}] = g$. Betrachte die Einbettungen $\varphi_i : F \to \mathbb{C}$. Eine Einbettung φ_i heißt *reelle Einbettung*, falls $\varphi_i(F) \subseteq \mathbb{R}$, andernfalls *komplexe Einbettung*. Für eine komplexe Einbettung φ_i erhalte eine weitere komplexe Einbettung $\overline{\varphi}_i$ durch komplexe Konjugation. Es gilt also für die Anzahl g aller Einbettungen von F nach $\mathbb{C}$:

$$g = 2s + r$$

(mit $2s$ bzw. r Anzahl der komplexen bzw. rellen Einbettungen).
Falls $s = 0$ nenne F *total reell*, für $r = 0$ *total komplex* oder auch *total imaginär*.
Ein Element α eines total reellen Körpers F^+ heißt *total negativ*, falls für jede Einbettung $\varphi : F^+ \to \mathbb{R}$ gilt: $\varphi(\alpha) < 0$.

Definition 4.1.5. Eine total imaginäre quadratische Erweiterung eines total reellen Zahlkörpers heißt *CM-Körper*.

Bemerkung 4.1.6. Ein CM-Körper F kann immer als $F^+(\sqrt{k'})$ mit $k' \in F^+$ und k' total negativ geschrieben werden.

Begründung. Eine algebraische Erweiterung $F \supseteq F^+$ eines Körpers der Charakteristik 0 ist immer separabel, und der Satz vom primitiven Element liefert ein $\beta \in F$ mit $F = F^+(\beta)$. Für β gibt es ein Minimalpolynom $f \in F^+[X]$, $\deg(f) = [F : F^+] = 2$, und es gilt:

$$f(\beta) = \beta^2 + a\beta + b = 0, \quad a, b \in F^+.$$

Quadratisch ergänzen liefert $\left(\beta + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 0$. Mit $\alpha := \beta + \frac{a}{2}$ gilt

$$\alpha^2 = -b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = k' \in F^+ ,$$

also $F = F^+(\alpha) = F^+(\sqrt{k'})$. Es gilt k' total negativ, da sonst $\alpha \in \mathbb{R}$, also $F \supseteq F^+$ total reell, im Widerspruch zu $F \supseteq F^+$ total komplex.

□

Bemerkung 4.1.7. Defintion 4.1.5 ist äquivalent zur Aussage: Für alle Einbettungen $\varphi_i : F \to \mathbb{C}$ wird von der komplexen Konjugation $^- : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die gleiche Abbildung $^-|_F : F \to F$ induziert, und F ist nicht Fixkörper von $^-|_F$.
Mit anderen Worten: Es gibt eine Abbildung $^-|_F : F \to F$, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "^-|_F"] & \mathbb{C} \arrow[d, "^-"] \\ F \arrow[r, "\varphi_i"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

für alle Einbettungen $\varphi_i : F \to \mathbb{C}$ kommutiert, und F ist nicht Fixkörper von $^-|_F$.

Begründung. Sei F^+ der Fixkörper von $^-|_F$ wie in Bemerkung 4.1.7, so entspricht dieser dem total reellen Teilkörper aus Definition 4.1.5. Somit liefern Definition 4.1.5 und Bemerkung 4.1.7 jeweils:

$$F = F^+(\alpha)$$

mit $\alpha^2 \in F^+$, F^+ total reell und α^2 total negativ. □

Definition 4.1.8. Sei F ein CM-Körper, $[F : \mathbb{Q}] = 2g$. Sei ferner $\Phi := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{2g}\}$ die Menge aller Einbettungen von F nach $\overline{\mathbb{Q}}$. Ein *CM-Typ von F* ist eine Teilmenge $\Phi' \subset \Phi$, $|\Phi'| = g$, für die gilt:

$$\Phi = \Phi' \cup \Phi''$$

wobei $\Phi'' := \overline{\Phi'} := \{\bar{\varphi} \mid \varphi \in \Phi'\}$. Bezeichne einen solchen CM-Typen mit (F, Φ') oder explizit mit $(F, \varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_g})$.

Bemerkung 4.1.9. Man kann zu einem CM-Körper F immer einen CM-Typen wählen. Zu jedem CM-Körper gibt es 2^g CM-Typen.

Begründung. Der CM-Körper F ist nach Definition eine total komplexe Erweiterung eines total reellen Zahlkörpers F^+. Sei $[F:\mathbb{Q}] = 2g$, also $[F^+:\mathbb{Q}] = g$. Bezeichne mit $\psi_1, \ldots, \psi_g$ die Einbettungen von F^+ nach $\overline{\mathbb{Q}}$. Jedes ψ_i setzt sich im folgenden Diagramm zu einer Einbettung φ_i von F fort:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, "\varphi_i"] & \\ F^+ \arrow[u] \arrow[r, "\psi_i"'] & \overline{\mathbb{Q}} \end{tikzcd}$$

Siehe [1] Kapitel 3 §3.4 Satz 9. Da φ_i und $\bar{\varphi}_i$ durch Einschränkung das gleiche ψ_i liefern, gilt $\varphi_i \neq \bar{\varphi}_j$ für alle $i,\, j \in \{1, \ldots, g\}$. Dann sind alle Einbettungen von F durch $\varphi_1, \ldots, \varphi_g, \bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_g$ gegeben.
Die zweite Behauptung folgt, da für jedes $i \in \{1, \ldots, g\}$ entweder φ_i oder $\bar{\varphi}_i$ ausgewählt werden kann. $\square$

4.2 Abelsche Varietäten mit komplexer Multiplikation

Seien in diesem Abschnitt V ein g-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, Λ ein Gitter in V, $X = V/\Lambda$ eine g-dimensionale einfache abelsche Varietät, F ein CM-Körper und $[F:\mathbb{Q}] = 2g$. Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_g, \bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_g$ die Einbettungen von F nach $\mathbb{C}$.
Ziel dieses Abschnittes ist es, einen Isomorphismus $F \simeq \Lambda_{\mathbb{Q}}$ für eine geeignete Basis von V zu finden, falls X, wie nachstehend definiert, komplexe Multiplikation erlaubt.

Definition 4.2.1. Eine g-dimensionale einfache abelsche Varietät X erlaubt *komplexe Multiplikation*, falls ein CM-Körper F, $[F:\mathbb{Q}] = 2g$ und ein Isomorphismus

$$\iota : F \to End_{\mathbb{Q}}(X)$$

existieren.

Bemerkung 4.2.2. Die Forderung einer einfachen abelschen Varietät ist hier wesentlich, sonst kann in Definition 4.2.1 kein Isomorphismus, sondern nur eine Einbettung gefordert werden. In dieser Arbeit werden nur einfache abelsche Varietäten studiert.

Bemerkung 4.2.3. Sei X eine g-dimensionale abelsche Varietät, F ein CM-Körper wie in Definition 4.2.1 und seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2g}$ die $\mathbb{C}$-Einbettungen von F. Falls X komplexe Multiplikation erlaubt, so hat Lemma 2.4.1 folgende Form:

$$\rho_r \otimes 1 \simeq \sum_{i=1}^{2g} \varphi_i \ .$$

Begründung. Nach Definition gilt $F \simeq End_{\mathbb{Q}}(X)$. Die irreduziblen $\mathbb{C}$-Darstellungen von F sind nach Korollar 2.2.3 gerade die Einbettungen $\varphi_i : F \to \mathbb{C}$, während der Isomorphismus ι in Definition 4.2.1 eine rationale Darstellung $(\rho_r \otimes 1) \circ \iota$ von F liefert.
Es gibt nur $2g$ Einbettungen. Die rationale Darstellung ist vom Grad $2g$, also gilt $m = 1$ in Lemma 2.4.1. □

Definition 4.2.4. Seien X und F wie in Definition 4.2.1 gewählt, so nenne X vom Typ $(F, \varphi_1, \ldots, \varphi_g)$, falls gilt:

$$\rho_a \simeq \begin{pmatrix} \varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_g \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 4.2.5. Für eine Varietät X vom Typ $(F, \varphi_1, \ldots, \varphi_g)$ muss $(F, \varphi_1, \ldots, \varphi_g)$ ein CM-Typ von F im Sinne von Definition 4.1.8 sein.

Begründung. Dies folgt mit Bemerkung 4.2.3 und Satz 3.2.6. □

Satz 4.2.6. Für eine einfache abelsche Varietät $X = V/\Lambda$ vom Typ $(F, \varphi_1, \ldots, \varphi_g)$ gilt

$$F \simeq \Lambda_{\mathbb{Q}}.$$

Für eine geeignete Basiswahl $X \simeq \mathbb{C}^g/\Lambda$ wird der Isomorphismus durch

$$\begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{C}^g \\ \alpha & \mapsto & (\varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_g(\alpha)) \end{array}$$

induziert.

Beweis. Sei $X \simeq \mathbb{C}^g/\Lambda$ vom Typ $(F, \varphi_1, \ldots, \varphi_g)$. Für die analytische Darstellung

$$\rho_a : End_{\mathbb{Q}}(X) \to Hom_{\mathbb{C}}(V, V)$$

gilt $\rho_a(f)(\Lambda) \subseteq \Lambda$, falls $f \in End(X)$, während für beliebiges $f \in End_{\mathbb{Q}}(X)$ nach Definition der analytischen Darstellung nur gilt:

$$\rho_a(f)(\Lambda) \subseteq \Lambda_{\mathbb{Q}}.$$

Für alle $\xi \in \Lambda - \{0\}$ muß die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} \psi : & F & \to & \Lambda_{\mathbb{Q}} \\ & \alpha & \mapsto & \rho_a(i(\alpha))\xi \end{array}$$

schon ein Isomorphismus sein: Sie ist $\mathbb{Q}$-linear und der Kern ist gleich 0, denn es gilt mit einer $\mathbb{Q}$-Basis $\{v_1, \ldots, v_{2g}\}$ von F für $\alpha = \sum_{i=1}^{2g} \alpha_i v_i$:

$$\Psi(\alpha) = \alpha_1 \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_g(v_1) \end{pmatrix} \xi + \cdots \alpha_{2g} \begin{pmatrix} \varphi_1(v_{2g}) & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_g(v_{2g}) \end{pmatrix} \xi = 0$$

woraus nach Ausklammern, da $\xi \neq 0$, also mindestens eine Komponente $\xi_i \neq 0$, für mindestens ein i folgt $\alpha_1\varphi_i(v_1) + \cdots + \alpha_{2g}\varphi_i(v_{2g}) = 0$. Da $v_1, \ldots, v_{2g}$ $\mathbb{Q}$-Basis von F, folgt $\alpha_i = 0\ \forall i$. Also $ker(\psi) = 0$.
Es folgt $\rho_a(i(F)) \simeq \mathbb{Q}^{2g}$ und, da auch $\Lambda_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbb{Q}^{2g}$, $F \simeq \Lambda_{\mathbb{Q}}$.
Zur durch den CM-Typen $(F, \varphi_1, \ldots, \varphi_g)$ gegebenen Basis von V, so dass

$$\rho_a \simeq \begin{pmatrix} \varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_n \end{pmatrix},$$

sind die Komponenten ξ_i von ξ jeweils ungleich 0, da sonst $\Lambda_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}^{g-1}$, also Λ kein Gitter wäre.
Wähle nun ein festes $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_g)$ und den Koordinatenwechsel

$$\begin{array}{cccc} T: & \mathbb{C}^g & \to & \mathbb{C}^g \\ & (z_1, \ldots, z_g) & \mapsto & (\xi_1^{-1}z_1, \ldots, \xi_g^{-1}z_g). \end{array}$$

Dann gilt $T(\Lambda_{\mathbb{Q}}) = T(\rho_a(F)\xi) = \{(\varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_g(\alpha)) \mid \alpha \in F\}$, da die Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(\alpha) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi_g(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1\varphi_1(\alpha) \\ \vdots \\ \xi_g\varphi_g(\alpha) \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} \varphi_1(\alpha) \\ \vdots \\ \varphi_g(\alpha) \end{pmatrix}$$

gilt. Also ist die gewünschte Basis $X \simeq \mathbb{C}^g/T(\Lambda)$. Die analytische Darstellung bleibt gleich, da gilt $T \circ \rho_a(\alpha) \circ T^{-1} = \rho_a(\alpha)$. □

4.3 Elliptische Kurven mit komplexer Multiplikation

Sei $\tau \in \mathbb{C}$, $Im(\tau) > 0$, also $\tau \notin \mathbb{Q}$ und $E = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ eine elliptische Kurve. Man liest an τ ab, ob E komplexe Multiplikation besitzt, oder nicht. Dazu folgende beiden Kriterien:

Satz 4.3.1. Sei $E = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$. Es gilt die Äquivalenz:

E hat komplexe Multiplikation	$\Longleftrightarrow$	τ ist ein Element eines imaginär quadratischen Zahlkörpers

Beweis. $\Leftarrow$: Setze $F := \mathbb{Q}(\tau)$. Nach Voraussetzung $Im(\tau) \neq 0$, $[F : \mathbb{Q}] = 2$. Sei $M := \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ das gewünschte Gitter in $\mathbb{C}$ und $\mathcal{O} := \{\alpha \in F \mid \alpha M \subseteq M\}$ eine entsprechende Ordnung in F, siehe [10] Kapitel I §12 Aufgabe 4.

Sei $F = \mathbb{Q}(\tau) \simeq \mathbb{Q}[X]/(p(X))$, also

$$p(\tau) = \tau^2 + a\tau + b = 0 \tag{4.1}$$

mit $a, b \in \mathbb{Q}$.
Berechne nun ausgesuchte Elemente in $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Es gilt für x, λ, $\mu \in \mathbb{Z}$:

$$x\tau \cdot (\lambda + \mu\tau) = \lambda x\tau + \mu x\tau^2 \overset{(4.1)}{=} \lambda x\tau + \mu x(-a\tau - b) = x(\lambda - \mu a)\tau - \mu xb\ .$$

Für x hinreichend groß gilt somit $x\tau \in \mathcal{O}$, also $\tau \in \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Da $p(\tau) = 0$ gilt $\tau \cdot (\tau + a) = -b$. Aus $x\tau \in \mathcal{O}$ und $a \in \mathbb{Q}$ folgt $y(\tau + a) \in \mathcal{O}$ für hinreichend großes $y \in \mathbb{Z}$. Also ist $\tau^{-1} = y(\tau + a) \otimes \frac{1}{-yb} \in \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Insgesamt folgt

$$F \simeq \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\ . \tag{4.2}$$

Jedes Element $o \in \mathcal{O}$ liefert nach Definition von $\mathcal{O}$ und Lemma 3.1.3 einen Endomorphismus von E

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \hookrightarrow & End(E) \\ o & \mapsto & [x \mapsto ox]. \end{array}$$

Tensorieren ergibt eine Einbettung

$$F \overset{(4.2)}{\simeq} \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \hookrightarrow End(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} =: End_{\mathbb{Q}}(E).$$

Diese ist, da $[F : \mathbb{Q}] = 2$ und $dim_{\mathbb{C}} E = 1$, nach [6] Chapter 1 §3 Lemma 3.2 schon ein Isomorphismus.
$\Rightarrow$: Sei E vom Typ F, also ist F nach Definition 4.1.5 total imaginäre quadratische Erweiterung von $\mathbb{Q}$. Satz 4.2.6 liefert $F \simeq (\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q} \oplus \tau\mathbb{Q}$. Also muss τ ein Element des total imaginären quadratischen Zahlkörpers F sein. $\square$

Lemma 4.3.2. Sei $E = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$, so ist äquivalent:

(i) $\tau \in \mathbb{Q}(\sqrt{-q'})$, $0 < q' \in \mathbb{Q}$, also in Termen der vorherigen Ausführungen: E hat komplexe Multiplikation.

(ii) $\tau + \bar{\tau} \in \mathbb{Q}$ und $\tau\bar{\tau} \in \mathbb{Q}$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nach Satz 4.3.1 gilt: $\tau \in \mathbb{Q}(\sqrt{-q'})$, $0 < q' \in \mathbb{Q}$, also

$$\tau = p + \sqrt{-q'}q, \quad p, q \in \mathbb{Q}, \quad 0 < q' \in \mathbb{Q}$$

und somit

$$\begin{array}{ccll} (\tau + \overline{\tau}) & = & 2p & \in \mathbb{Q} \\ \tau\overline{\tau} & = & p^2 + q'q^2 & \in \mathbb{Q} \end{array}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei vorerst beliebiges

$$\tau = p_{\mathbb{R}} + \sqrt{-1}q_{\mathbb{R}} \in \mathbb{C}, \quad p_{\mathbb{R}}, q_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$$

gewählt. Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{array}{rcll} (\tau + \overline{\tau}) & = & 2p_{\mathbb{R}} & \in \mathbb{Q} \\ \tau\bar{\tau} & = & p_{\mathbb{R}}^2 + q_{\mathbb{R}}^2 & \in \mathbb{Q} \end{array}$$

Folglich

$$p := p_{\mathbb{R}} \in \mathbb{Q}$$

und

$$q_{\mathbb{R}}^2 = \tau\bar{\tau} - p^2 \in \mathbb{Q}$$

also $q_{\mathbb{R}} = \sqrt{q'}q$ mit $q{,}q' \in \mathbb{Q}$, q' o.E. quadratfrei. Insgesamt folgt

$$\tau = p + \sqrt{-1}\sqrt{q'}q = p + \sqrt{-q'}q \in \mathbb{Q}(\sqrt{-q'}).$$

Die Wurzel ist notwendig negativ, $(q' > 0)$, da sonst $Im(\tau) = 0$. Also liegt τ in einem imaginär quadratischen Zahlkörper. $\square$

Kapitel 5

Konstruktion abelscher Varietäten mit CM

In diesem Kapitel wird in drei Schritten zu einem gegebenen CM-Körper F eine abelsche Varietät X mit komplexer Multiplikation konstruiert:

(i) Konstruktion eines komplexen Torus X

(ii) Konstruktion einer Riemann-Form auf X

(iii) Konstruktion eines Isomorphismus $F \simeq End_{\mathbb{Q}}(X)$

5.1 Konstruktion eines geeigneten komplexen Torus

Sei F ein CM-Körper vom Grad $2g$ über $\mathbb{Q}$, $(F, \varphi_1, \ldots, \varphi_g)$ ein CM-Typ zu F. Für jedes $\alpha \in F$ setze

$$\Phi(\alpha) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\alpha) \\ \vdots \\ \varphi_g(\alpha) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^g.$$

Lemma 5.1.1. Sei $K \supseteq \mathbb{Q}$ eine endliche Körpererweiterung, $[K : \mathbb{Q}] = n$. Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von K und seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ die Einbettungen von K nach $\mathbb{C}$. Dann sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) \\ \vdots \\ \varphi_1(x_n) \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \varphi_n(x_1) \\ \vdots \\ \varphi_n(x_n) \end{pmatrix}$$

linear unabhängig über $\mathbb{C}$.

Beweis. Siehe [1] Kapitel 4 §4.6 Korollar 3. □

Lemma 5.1.2. Sei $(F, \varphi_1, \ldots, \varphi_g)$ ein CM-Typ. Sei $\mathcal{O}$ ein von einer $\mathbb{Q}$-Basis von F erzeugter freier $\mathbb{Z}$-Modul. Dann bildet die abelsche Gruppe

$$\Phi(\mathcal{O}) := \{\Phi(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{O}\}$$

ein Gitter in $\mathbb{C}^g$.

Beweis. Sei $v_1, \ldots, v_{2g}$ die $\mathcal{O}$ erzeugende $\mathbb{Q}$-Basis von F. Da $(F, \varphi_1, \ldots, \varphi_g)$ nach Voraussetzung CM-Typ ist, sind durch $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_g, \overline{\varphi}_1, \ldots, \overline{\varphi}_g\}$ alle Einbettungen von F nach $\mathbb{C}$ gegeben. Nach Lemma 5.1.1 gilt:

$$det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \cdots & \varphi_1(v_{2g}) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_g(v_1) & \cdots & \varphi_g(v_{2g}) \\ \overline{\varphi}_1(v_1) & \cdots & \overline{\varphi}_1(v_{2g}) \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{\varphi}_g(v_1) & \cdots & \overline{\varphi}_g(v_{2g}) \end{pmatrix} \neq 0 \tag{5.1}$$

Also sind die $2g$ Spaltenvektoren $\mathbb{C}$-linear unabhängig und spannen $\mathbb{C}^{2g}$ auf. Insbesondere sind die Spaltenvektoren aber auch $\mathbb{R}$-linear unabhängig, daraus folgt $\Phi(v_1), \ldots, \Phi(v_{2g})$ sind $\mathbb{R}$-linear unabhängig, denn aus $\mathbb{R}$-linearer Abhängigkeit der $\Phi(v_i)$ folgt $\mathbb{R}$-lineare Abhängigkeit der Spaltenvektoren in (5.1):
Angenommen, es gibt $a_1, \ldots, a_{2g}$, nicht alle gleich 0, mit $\sum_{i=1}^{2g} a_i \Phi(v_i) = 0$. Es gilt

$$\sum_{i=1}^{2g} \overline{a_i \Phi(v_i)} = 0 \overset{a_i \in \mathbb{R}}{\iff} \sum_{i=1}^{2g} a_i \bar{\Phi}(v_i) = 0.$$

Somit sind die Spaltenvektoren in (5.1) $\mathbb{R}$-linear abhängig.
Folglich sind die $2g$ Vektoren $\Phi(v_1), \ldots, \Phi(v_{2g})$ aus $\mathbb{C}^g$ über $\mathbb{R}$ linear unabhängig und der dadurch erzeugte freie $\mathbb{Z}$-Modul bildet ein Gitter in $\mathbb{C}^g$. □

Bemerkung 5.1.3. Man kann für den Modul $\mathcal{O}$ in Lemma 5.1.2 die Hauptordnung $\mathcal{O}_F$, den Ring der ganzen Zahlen in F verwenden.

Erhalte somit einen komplexen Torus $X = \mathbb{C}^g / \Phi(\mathcal{O}_F)$.

5.2 Konstruktion einer Riemann-Form

Definition 5.2.1. Sei $X = V/\Lambda$ ein komplexer Torus. Eine *Hermitesche Form* auf V ist eine Abbildung

$$H : V \times V \to \mathbb{C},$$

linear im ersten Faktor, für die $H(z, w) = \overline{H(w, z)}$ gilt.
Eine *Riemann-Form* auf X ist eine positiv definite Hermitesche Form auf V, für die gilt:

$$Im(H(\Lambda, \Lambda)) \subseteq \mathbb{Z}.$$

Ein komplexer Torus, der eine Riemann-Form erlaubt, heißt *polarisierbar*.

Bemerkung 5.2.2. Die polarisierbaren komplexen Tori entsprechen den komplexen abelschen Varietäten. Es reicht also, den in Abschnitt 5.1 konstruierten komplexen Torus mit einer Riemann-Form zu versehen.

Begründung. Siehe [8] Part I §2 Theorem 2.9. □

5.2.1 Bewertungen

Um die positive Definitheit der konstruierten Form zu gewährleisten, ist der Approximationssatz aus der Bewertungstheorie erforderlich.

Definition 5.2.3. Eine Bewertung ν eines Körpers K ist eine Funktion

$$\begin{array}{cccc} \mid\ \mid_\nu: & K & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \mid x \mid_\nu \end{array}$$

mit den Eigenschaften

(i) $\mid x \mid_\nu \geq 0 \ \forall x \in K$ und $\mid x \mid_\nu = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $\mid xy \mid_\nu = \mid x \mid_\nu \mid y \mid_\nu \ \ \forall x, y \in K$

(iii) $\mid x + y \mid_\nu \leq \mid x \mid_\nu + \mid y \mid_\nu \ \ \forall x, y \in K$ „Dreiecksungleichung“

Zwei Bewertungen ν_1 und ν_2 heißen *äquivalent*, falls die assoziierten Metriken die gleiche Topologie auf K induzieren. Nenne zwei nicht äquivalente Bewertungen *inäquivalent*.

Bemerkung 5.2.4. Sei F ein Zahlkörper. Jede Einbettung $\varphi : F \to \mathbb{C}$ induziert vermöge des üblichen Absolutbetrages in $\mathbb{C}$ eine Bewertung

$$\begin{array}{cccc} \mid\ \mid_\varphi: & F & \to & \mathbb{R} \\ & \alpha & \mapsto & |\varphi(\alpha)|_{\mathbb{C}}\ . \end{array}$$

Lemma 5.2.5. Für einen algebraischen Zahlkörper F sind zwei Bewertungen $\mid\ \mid_\varphi$ und $\mid\ \mid_\psi$ genau dann äquivalent, falls $\varphi = \psi$ oder $\varphi = \overline{\psi}$.

Beweis. [5] Chapter II §1 Theorem 2. □

Bemerkung 5.2.6. Sei $(F, \varphi_1, \ldots, \varphi_g)$ ein CM-Typ, so sind die $\varphi_1, \ldots, \varphi_g$ nach Definition paarweise nicht-konjugiert. Nach Lemma 5.2.5 erhalte somit n inäquivalente Bewertungen. Auch die Einschränkungen der φ_i auf F^+ bleiben inäquivalent.

Satz 5.2.7. Sei K ein Körper und seien $\mid\ \mid_1, \ldots, \mid\ \mid_n$ nicht-triviale paarweise inäquivalente Bewertungen auf K. Seien $x_1, \ldots, x_n$ Elemente aus K und $\epsilon > 0$, so gibt es ein $x \in K$ mit

$$\mid x - x_i \mid_i < \epsilon$$

Beweis. [4] Chapter XII §1 Theorem 1.2. □

5.2.2 Konstruktion

Sei F der in 5.1 gewählte CM-Körper. Schreibe F nach Bemerkung 4.1.6 als

$$F = F^+(\xi)$$

mit F^+ total reeller Teilkörper von F, $\xi^2 \in F^+$ und ξ^2 total negativ. Zur Konstruktion einer Riemann-Form benötige ein geeignetes primitives Element von $F \supseteq F^+$.

Bemerkung 5.2.8. Sei ξ wie in Bemerkung 4.1.6 gewählt. Es gibt immer ein primitives Element ξ' von $F \supseteq F^+$, für das zusätzlich gilt:

$$Im(\varphi_j \xi') > 0 \quad \forall j = 1, \ldots, g.$$

Begründung. Falls die Bedingung schon für ξ erfüllt ist, ist nichts zu zeigen. Andernfalls konstruiere ein $\alpha \in F^+$ mit der Eigenschaft:

$$(\varphi_j \alpha) Im(\varphi_j \xi) > 0 \quad \forall\ j = 1, \ldots, g.$$

Wähle dazu ein Tupel $(x_1, \ldots, x_g) \in (F^+)^g$,

$$x_j \quad = \quad \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ +1 \end{array} \right\} \quad falls \quad \left\{ \begin{array}{c} Im(\varphi_j \xi) < 0 \\ Im(\varphi_j \xi) > 0 \end{array} \right\}.$$

Für ein hinreichend kleines ϵ liefert der Approximationssatz ein $\alpha \in F^+$ mit

$$\mid \varphi_j(\alpha - x_j) \mid = \mid \varphi_j(\alpha) - \varphi_j(x_j) \mid \overset{x_j \in \mathbb{Q}}{=} \mid \varphi_j(\alpha) - x_j \mid < \epsilon$$

und $\varphi_j(\alpha)$ hat das gleiche Vorzeichen wie x_j. Setzte nun $\xi' := \alpha\xi$ und es folgt:

$$Im(\varphi_j(\xi')) = Im(\varphi_j(\alpha\xi)) = Im(\varphi_j(\alpha) \cdot \varphi_j(\xi)) \overset{Im\ \mathbb{R}-linear}{=} (\varphi_j \alpha) Im(\varphi_j \xi) > 0.$$

$\square$

Satz 5.2.9. Der im Abschnitt 5.1 definierte komplexe Torus $T := \mathbb{C}^g / \Phi(\mathcal{O}_F)$ ist eine abelsche Varietät.

Beweis. Ziel ist die Konstruktion einer positiv definiten Hermiteschen Form H, für die $Im(H(\Phi(\mathcal{O}_F), \Phi(\mathcal{O}_F))) \subseteq \mathbb{Z}$ gilt.
Definiere für $z = (z_1, \ldots, z_g)$, $w = (w_1, \ldots, w_g) \in \mathbb{C}^g$ eine Bilinearform

$$\begin{array}{rccl} E: & \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g & \to & \mathbb{R} \\ & (z, w) & \mapsto & E(z, w) := \sum_{j=1}^{g} (\varphi_j \xi')(\bar{z}_j w_j - z_j \bar{w}_j). \end{array}$$

Die Form ist als Summe von Produkten rein imaginärer Zahlen reell.
Es gilt

$$E(w, z) = \sum_{j=1}^{g} (\varphi_j \xi')(\bar{w}_j z_j - w_j \bar{z}_j) = -E(z, w).$$

Ferner

$$E(\imath z,w)=\sum_{j=1}^{g}(\varphi_j\xi)(\bar{\imath}\bar{z}_jw_j-\imath z_j\bar{w}_j)=-i\sum_{j=1}^{g}(\varphi_j\xi)(\bar{z}_jw_j+z_j\bar{w}_j)=E(\imath w,z).$$

Erhalte die Ungleichung

$$E(\imath z,z)=-\imath\sum_{j=1}^{g}(\varphi_j\xi')(\bar{z}_jz_j+z_j\bar{z}_j)>0\quad\forall z\neq 0$$

da $(\bar{z}_jz_j+z_j\bar{z}_j)=2\mid z_j\mid^2>0$ und $\varphi_j\xi'$ rein imaginär mit $Im(\varphi_j\xi')>0$ nach Konstruktion.
Definiere die Form

$$\begin{array}{rccl} H: & \mathbb{C}^g\times\mathbb{C}^g & \to & \mathbb{C} \\ & (z,w) & \mapsto & H(z,w):=E(\imath z,w)+\imath E(z,w) \end{array}$$

Mit obigen Rechnungen gilt $H(z,w)=\overline{H,(w,z)}$ und $H(z,z)=E(\imath z,z)$. Also ist H hermitesch und positiv definit.
Es bleibt zu zeigen: $Im(H)(z,w)=E(z,w)$ ganzzahlig auf dem Gitter.
Da F separabel, gilt für die Spur

$$\begin{aligned} Tr_{K/\mathbb{Q}}(\xi'\bar{\alpha}\beta) &= \textstyle\sum_{j=1}^{g}\varphi_j(\xi'\bar{\alpha}\beta)+\sum_{j=1}^{n}\overline{\varphi}_j(\xi'\bar{\alpha}\beta) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{g}\varphi_j(\xi')\underbrace{\varphi_j(\bar{\alpha})}_{\overline{\varphi}_j(\alpha)}\varphi_j(\beta)+\sum_{j=1}^{n}\overline{\varphi}_j(\xi')\underbrace{\varphi_j(\bar{\alpha})}_{\overline{\varphi}_j(\alpha)}\varphi_j(\beta) \\ &= E(\Phi(\alpha),\Phi(\beta)) \end{aligned}$$

Zur letzten Gleichheit ist noch anzumerken, dass, da $\varphi_j\xi'$ rein imaginär,

$$\overline{\varphi}_j(\xi')=\varphi_j(\bar{\xi}')=\varphi_j(-\xi')=-\varphi_j(\xi')$$

gilt. Da α und β in einem endlich erzeugten Untermodul liegen, sind die Nenner der Spur nach unten beschränkt und man findet eine ganze Zahl N, so dass $N\cdot E(z,w)$ ganzzahlig für alle Elemente des Gitters.
Setze, falls nötig, $H:=N\cdot H$ und erhalte die gewünschte hermitesche Form. $\square$

5.3 Verifikation CM

Seien $(F,\varphi_1,\ldots,\varphi_g)$ und $T:=\mathbb{C}^g/\Phi(\mathcal{O}_F)$ wie im Abschnitt 5.1 gewählt.
Hier wird der Isomorphismus

$$\iota: F\to End_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}^g/\Phi(\mathcal{O}_F))$$

konstruiert.

Sei

$$S_\Phi(\alpha) := S(\alpha) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\alpha) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi_g(\alpha) \end{pmatrix} = diag(\varphi_1(\alpha), \ldots, \varphi_g(\alpha))$$

und $\mathcal{O}_F$ der Ring der ganzen Zahlen in F. Die Matrix $S(\alpha)$ induziert für $\alpha \in \mathcal{O}_F$ eine lineare Abbildung auf $\mathbb{C}^g$. Es gilt

$$S(\alpha)\Phi(\mathcal{O}_F) = \left\{ \begin{pmatrix} \varphi_1(\alpha \cdot o) \\ \vdots \\ \varphi_g(\alpha \cdot o) \end{pmatrix} \mid o \in \mathcal{O}_F \right\} \overset{\mathcal{O}_F \text{ Ring}}{\subseteq} \Phi(\mathcal{O}_F)$$

Also induziert $\alpha \in \mathcal{O}_F$ nach Lemma 3.1.3 einen Endomorphismus von $X = \mathbb{C}^g/\Phi(\mathcal{O}_F)$. Erhalte eine Einbettung

$$\begin{array}{rcl} F = \mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \rightarrow & End_{\mathbb{Q}}(X) \\ \alpha \otimes q & \mapsto & S(\alpha) \otimes q \end{array}$$

die nach [6] Chapter 1 §3 Lemma 3.2, falls X einfach, schon ein Isomorphismus ist.

Kapitel 6

Kohomologie komplexer Tori

Ziel dieses Kapitels ist die Beschreibung der Kohomologieklassen

$$H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(X) := H^{2p}_{sing}(X,\mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(X) \subset H^{2p}_{DR}(X,\mathbb{C}),$$

genannt *rationale* (p,p)*-Klassen.*
Hierfür sind Kenntnisse sowohl der Topologie (für die Rationalität) als auch der komplexen Struktur ((p,p)-Eigenschaft) erforderlich.
Für Kapitel 7 werden die rationalen Klassen in Termen der De Rham Kohomolgie bestimmt. Die algebraische Topologie liefert eine Inklusion

$$H^n_{sing}(X,\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^n_{sing}(X,\mathbb{R}) \overset{DeRham}{\simeq} H^n_{DR}(X,\mathbb{R})$$

und man sucht das Bild der Inklusion unter dem De Rham Isomorphismus.
Kapitel 8 hingegen beschreibt Kohomologieklassen CM-abelscher Varietäten als multilineare Abbildungen mit Hilfe des CM-Typs.

6.1 Rationale (p,p)-Klassen via De Rham Kohomologie

Sei V wieder wie üblich ein g-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, Λ ein Gitter in V und $X = V/\Lambda$ der entsprechende komplexe Torus. In diesem Abschnitt werden rationale (p,p)-Klassen auf X als De Rham Kohomologieklassen, das heißt, als invariante Differentialformen, beschrieben.

Bemerkung 6.1.1. Auf einem komplexen Torus X erhalte für $R \in \{\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ die Isomorphismen

$$\begin{aligned} H^i_{sing}(X,R) &\simeq Hom_{\mathbb{Z}}(H_i^{sing}(X,\mathbb{Z}),R) \overset{kan.}{\simeq} Hom_R(R\otimes_{\mathbb{Z}} H_i^{sing}(X,\mathbb{Z}),R) \\ &\simeq Hom_R(H_i^{sing}(X,R),R) \simeq H_i^{sing}(X,R)^* \end{aligned} \tag{6.1}$$

nach [2] Part III §23 Theorem (23.28) und Exercise (23.23), Part IV §29 Theorem (29.12) . Die singuläre Homologie ist also dual zur singulären Kohomologie.

Definition 6.1.2. Definiere auf V die *Translation um* x als:

$$\begin{aligned} t_x : V &\to V \\ a &\mapsto a + x \end{aligned}$$

Eine Translation auf V induziert eine Translation auf X.
Eine komplexwertige C^∞-Differentialform ω auf V heißt *(translations-)invariant*, falls

$$t_x^* \omega = \omega \ \forall x \in V.$$

Eine translationsinvariante Form auf V ist insbesondere invariant für Gitterelemente, spreche somit auch von translationsinvarianten Formen auf X.

Bemerkung 6.1.3. Wähle eine $\mathbb{Z}$-Basis $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2g}$ von Λ. Seien $x_1, \ldots, x_{2g}$ die entsprechenden reellen Koordinatenfunktionen, so dass gilt

$$v = \sum_{i=1}^{2g} \lambda_i x_i(v) \ \forall v \in V.$$

Die Differentialformen dx_i sind translationsinvariant auf V, da:

$$t_v^* dx_j = dt_v^* x_j = d(x_j + v) = \sum_{i=1}^{2g} \frac{\partial (x_j + v)}{\partial x_i} dx_i = dx_j \ .$$

Insbesondere sind sie invariant bei der Translation um Elemente des Gitters, sind also Pullbacks eindeutig bestimmter Formen auf X durch die kanonische Projektion

$$\pi : V \to X = V/\Lambda.$$

Bezeichne die entsprechenden Formen auf X wieder mit dx_j. Diese bilden eine Basis der translationsinvarianten 1-Formen auf X.

Bemerkung 6.1.4. Auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M gibt es eine bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \{\text{singuläre } i\text{-Ketten mit Koeffizienten in } \mathbb{R}\} \times \{\mathbb{R}\text{-wertige } i\text{-Formen}\} &\to \mathbb{R} \\ (\sigma, \omega) &\mapsto \int_\sigma \omega \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Stokes induziert diese Abbildung eine perfekte Paarung von $\mathbb{R}$-Vektorräumen

$$H_i^{sing}(M, \mathbb{R}) \times H_{DR}^i(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}.$$

Definition 6.1.5. Sei ω wieder eine $\mathbb{R}$-wertige i-Form, $\sigma \in H_i^{sing}(X, \mathbb{Q})$. Eine Zahl

$$\int_\sigma \omega$$

heißt *Periode* von ω.

Bemerkung 6.1.6. Eine $\mathbb{R}$-wertige i-Form ω definiert ein Element

$$\begin{array}{rccc} \omega: & H_i^{sing}(X,\mathbb{Q}) & \to & \mathbb{R} \\ & \sigma & \mapsto & \int_\sigma \omega \end{array}$$

in $Hom_{\mathbb{Q}}(H_i^{sing}(X,\mathbb{Q}),\mathbb{R})$. Identifiziert man $H^i_{sing}(X,\mathbb{Q})$ gemäß Bemerkung 6.1.1 mit $Hom_{\mathbb{Q}}(H_i^{sing}(X,\mathbb{Q}),\mathbb{Q})$, so entsprechen die rationalen Kohomologieklassen in der De Rham Kohomologie gerade denjenigen Klassen die repräsentiert werden durch Formen, deren Perioden alle rational sind.

6.1.1 Eine Basis für $H^1_{sing}(X,\mathbb{Q})$

Sei $X = V/\Lambda$ ein komplexer Torus, $dim_{\mathbb{C}}(V) = g$, $\pi : V \to X$ die kanonische Projektion. Identifiziere den Kern Λ von π mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(X,0)$. Da X wegzusammenhängend und $\pi_1(X,0) \simeq \Lambda$ kommutativ, gilt $H_1(X,\mathbb{Z}) \simeq \Lambda$ gemäß [2] Part II §12 Corollary (12.2).

Bemerkung 6.1.7. Der Isomorphismus $H_1(X,\mathbb{Z}) \simeq \Lambda$ ergibt sich wie folgt: Ein Basiselement $\lambda_j \in \Lambda$ wird aufgefasst als der 1-Simplex:

$$\begin{array}{rccc} \lambda_j: & \Delta^1 = [0,1] & \to & X \\ & a & \mapsto & a\lambda_j \end{array}$$

Entsprechend erhält man den 0-Simplex $\partial\lambda_j$

$$\begin{array}{rccc} \partial\lambda_j: & \Delta^0 = \{0\} & \to & X \\ & a & \mapsto & \lambda_j^0(a) - \lambda_j^1(a) \end{array}$$

mit

$$\begin{array}{rccccc} \lambda_j^0 := \lambda_j \circ k_0^0: & \Delta^0 & \overset{k_0^0}{\to} & \Delta^1 & \to & X \\ & 0 & \mapsto & 1 & \mapsto & \lambda_j(1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} \lambda_j^1 := \lambda_j \circ k_1^0: & \Delta^0 & \overset{k_0^0}{\to} & \Delta^1 & \to & X \\ & 0 & \mapsto & 0 & \mapsto & \lambda_j(0) \end{array}$$

und erhalte

$$\partial\lambda_j(0) = \lambda_j(1) - \lambda_j(0) = \lambda_j - 0 = \lambda_j$$

Die k_0^0 und k_1^0 sind Randabbildungen der Simplices, wie beispielsweise in [14] Chapter 4 §4.6 definiert.

Bemerkung 6.1.8. Sei R ein Körper, $char(R) = 0$. Da $H_i^{sing}(X,\mathbb{Z})$ endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul für alle $i = 1,\dots,2g$, gilt nach [2] Part III §23 Theorem (23.28) und Exercise (23.23)

$$\begin{aligned} H^i_{sing}(X,R) &\simeq Hom(H_i^{sing}(X,\mathbb{Z}),R) \\ &\simeq Hom(H_i^{sing}(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R \\ &\simeq H_i^{sing}(X,\mathbb{Z})^* \otimes_{\mathbb{Z}} R \\ &\simeq H^i_{sing}(X,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R \end{aligned} \tag{6.2}$$

Für die Homologie gilt ferner

$$H_i^{sing}(X,R) \simeq H_i^{sing}(X,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R \tag{6.3}$$

nach [2] Part IV §29 Theorem (29.12).

Lemma 6.1.9. Die $\{dx_1, \ldots, dx_{2g}\}$ bilden unter dem De Rham Isomorphismus R-Basen der R-Vektorräume $H^1_{sing}(X,R)$ für $R \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Beweis. Nach Bemerkung 6.1.8 bilden die λ_i eine R-Basis von $H_1^{sing}(X,R)$ und es reicht, $(dx_i, \lambda_j) = \delta_{ij}$ zu zeigen. Dann sind die dx_i duale Basis zu den λ_j, also nach Bemerkung 6.1.1 eine Basis von $H^1_{sing}(X,R)$.
Es gilt:

$$(dx_i, \lambda_j) = \int_{\lambda_j} dx_i \overset{Stokes}{=} \int_{\partial\lambda_j} x_i \overset{0-Simplex,Def}{=} x_i(\lambda_j - 0) = \delta_{ij}$$

wobei die Integration gemäß Bemerkung 6.1.7 ausgeführt wird. □

6.1.2 Eine Basis für $H^i_{sing}(X,\mathbb{Q})$

Lemma 6.1.10. Die kanonische vom Cup-Produkt induzierte Abbildung

$$\wedge^i H^1_{sing}(X,\mathbb{Z}) \to H^i_{sing}(X,\mathbb{Z})$$

ist ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln für alle $i = 1, \ldots, 2g$.

Beweis. [7] Chapter 1 §3 Lemma (3.1). □

Korollar 6.1.11. Die Elemente $dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_i}$, $j_k \in \{1, \ldots, 2g\}$, $j_1 < \ldots < j_i$ bilden eine $\mathbb{Q}$-Basis von $H^i(X,\mathbb{Q})$ und eine $\mathbb{C}$-Basis von $H^i(X,\mathbb{C})$.

Beweis. Folgt aus Lemma 6.1.9 und der Tatsache, dass das Cup-Produkt unter dem De Rham Isomorphismus dem äußeren Produkt von Differentialformen entspricht, siehe [3] Chapter 0 §4 S. 60. □

Bemerkung 6.1.12. Die $dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_i}$, $j_k \in \{1, \ldots, 2g\}$, $j_1 < \ldots < j_i$ sind auch eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums $IF^i(X)$ der invarianten i-Differentialformen. Man hat also einen durch den De Rham Isomorphismus induzierten Isomorphismus

$$H^i_{sing}(X,\mathbb{C}) \simeq IF^i(X).$$

Korollar 6.1.13. Sind $\{x_1, \ldots, x_{2g}\}$ die zu einer Gitterbasis $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2g}$ gehörigen Koordinatenfunktionen, so gilt

$$\alpha = \sum_{(j_1,\ldots,j_i)\in I} a_{(j_1,\ldots,j_i)} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_i} \in H^i(X,\mathbb{Q}) \Leftrightarrow a_{(j_1,\ldots,j_i)} \in \mathbb{Q} \quad \forall (j_1,\ldots,j_i) \in I$$

.

Beweis. Folgt aus Korollar 6.1.11. □

6.1.3 Komplexe Struktur und De Rham Kohomologie

Satz 6.1.14. Sei $X = V/\Lambda$ ein komplexer Torus. Es gilt die Hodge-Zerlegung

$$H^i(X, \mathbb{C}) \simeq \oplus_{p+q=i} H^q(X, \Omega_X^p) \tag{6.4}$$

mit Ω_X^p der Garbe der holomorphen p-Formen auf X. Ferner habe Isomorphismen:

$$H^q(\Omega_X^p) \simeq IF^{p,q}(X) \tag{6.5}$$

wobei $IF^{p,q}(X)$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum der (translations-)invarianten Differentialformen vom Typ (p, q) bezeichnet.

Beweis. Siehe [7] Chapter 1 §4. □

Bemerkung 6.1.15. Die Form α ist invariant und vom Typ (p, q) genau dann, wenn sie als $\alpha = \sum c_{IJ} dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_q}$ mit Konstanten $c_{IJ} \in \mathbb{C}$ geschrieben werden kann.

6.2 Rationale (p, p)-Klassen CM-abelscher Varietäten

Sei $X = V/\Lambda$ eine g-dimensionale abelsche Varietät vom Typ $(F, \varphi_1, \ldots, \varphi_g)$. In diesem Fall ist eine Beschreibung der Kohomologie in Termen der Einbettungen $\varphi_i : F \to \mathbb{C}$ möglich. Nach Satz 4.2.6 gilt $F \simeq \Lambda_{\mathbb{Q}}$.

6.2.1 Charakterisierung rationaler Kohomologieklassen

Bemerkung 6.2.1. Sei (X, ι) vom Typ $(F, \varphi_1, \ldots, \varphi_g)$.
Für die rationalen Kohomologieklassen gilt:

$$\begin{aligned} H^1_{sing}(X, \mathbb{Q}) &\simeq H^1_{sing}(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq H_1^{sing}(X, \mathbb{Z})^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\ &\simeq Hom_{\mathbb{Z}}(\underbrace{H_1^{sing}(X, \mathbb{Z})}_{\Lambda}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq Hom_{\mathbb{Z}}(\Lambda, \mathbb{Q}) \\ &\simeq Hom_{\mathbb{Q}}(\underbrace{\Lambda_{\mathbb{Q}}}_{F}, \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

Somit gilt nach Lemma 6.1.10

$$H^i_{sing}(X, \mathbb{Q}) \simeq \wedge^i \underbrace{Hom_{\mathbb{Q}}(F, \mathbb{Q})}_{F^*} \simeq \wedge^i(F^*) \simeq (\wedge^i F)^* \simeq Alt^i(F, \mathbb{Q}). \tag{6.6}$$

Identifiziere somit eine rationale Kohomologieklasse als alternierende $\mathbb{Q}$-multilineare Abbildung $f : \underbrace{F \times \ldots \times F}_{i-mal} \to \mathbb{Q}$.

Bemerkung 6.2.2. Aus Bemerkung 6.2.1 und Bemerkung 6.1.8 erhalte:

$$H^i_{sing}(X,\mathbb{C}) \simeq H^i_{sing}(X,\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \overset{\text{Gl. 6.6}}{\simeq} Alt^i(F,\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq Alt^i(F,\mathbb{C}) \simeq \wedge^i Hom_{\mathbb{Q}}(F,\mathbb{C})$$

Fasse somit eine Kohomologieklasse in $H^i(X,\mathbb{C})$ als alternierende $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $f : \underbrace{F \times \ldots \times F}_{i-mal} \to \mathbb{C}$ auf.

Bemerkung 6.2.3. Definiere vermöge des Isomorphismus $H^i_{sing}(X,\mathbb{C}) \simeq Alt^i(F,\mathbb{C})$ eine Operation von $Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ auf $H^i_{sing}(X,\mathbb{C})$ durch

$$\begin{array}{ccc} Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q}) \times Alt^i(F,\mathbb{C}) & \to & Alt^i(F,\mathbb{C}) \\ (\sigma, f) & \mapsto & \sigma f \end{array},$$

wobei die alternierende Form σf durch

$$\begin{array}{cccc} \sigma f : & F^i & \to & \mathbb{C} \\ & \alpha & \mapsto & \sigma f(\alpha) \end{array}$$

definiert ist.

Bemerkung 6.2.4. Die in der vorhergehenden Bemerkung definierte Operation kann auch als Operation auf $H^i_{sing}(X,\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq H^i_{sing}(X,\mathbb{C})$ betrachtet werden. Die Operation von $Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ auf $H^i_{sing}(X,\mathbb{Q})$ ist nach Bemerkungen 6.2.1 und 6.2.3 die Identität, also operiert $Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ nur auf der rechten Seite des Tensorprodukts:

$$\begin{array}{ccc} Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q}) \times Alt^i(F,\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} & \to & Alt^i(F,\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \\ (\sigma, f \otimes c) & \mapsto & f \otimes \sigma(c) \end{array}$$

Für die Betrachtungen im Abschnitt 8 brauche noch folgende Charakterisierung der Operation: Es gilt

$$Alt^i(F,\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq (\wedge^i Hom_{\mathbb{Q}}(F,\mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq (\wedge^i Hom_{\mathbb{Q}}(F,\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$$

und $Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ operiert immer auf dem zweiten Faktor des Tensorproduktes. Unter dem Isomorphismus

$$(\wedge^i Hom_{\mathbb{Q}}(F,\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}) \simeq \wedge^i Hom_{\mathbb{Q}}(F,\mathbb{C})$$

operiert die Automorphismengruppe also auf den einzelnen Elementen φ_j eines Dachproduktes $f = q\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_i$ durch $\sigma(\varphi_j)(\alpha) = \sigma(\varphi_j(\alpha))$.

Lemma 6.2.5. Eine Kohomologieklasse f ist genau dann rational, falls

$$\sigma(f) = f \ \forall \sigma \in Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q}).$$

Beweis. $\Rightarrow$: Klar nach 6.2.4.
$\Leftarrow$: Beweis durch Widerspruch: Angenommen $f \notin H^i_{sing}(X, \mathbb{Q})$, so gilt:

$$\exists (x_1, \ldots, x_i) \in F^i \mid f(x_1, \ldots, x_i) = \alpha_0 \notin \mathbb{Q}.$$

Da $\overline{\mathbb{Q}}$ dicht in $\mathbb{C}$, existieren $(x'_1, \ldots, x'_i) \in F^i$, $\alpha'_0 \in \overline{\mathbb{Q}}$ mit $f(x'_1, \ldots, x'_i) = \alpha'_0 \notin \mathbb{Q}$. Betrachte die separable Erweiterung $\mathbb{Q}(\alpha'_0)$. Es gilt $[\mathbb{Q}(\alpha'_0) : \mathbb{Q}] \geq 2$. Es gibt also mindestens eine Einbettung

$$\iota : \mathbb{Q}(\alpha'_0) \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$$

ungleich der Einschränkung der Identität $\overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}}$. Die Einbettung ι besitzt nach [1] Kapitel 3 §3.1 Satz 9 eine Fortsetzung ι':

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathbb{Q}} \arrow[dr, "\iota'"] & \\
\mathbb{Q}(\alpha'_0) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\iota"'] & \overline{\mathbb{Q}}
\end{tikzcd}$$

Die Fortsetzung von ι' auf $\mathbb{C}$ liefert den gewünschten Automorphismus σ, für den $\sigma f \neq f$ gilt. $\square$

6.2.2 Charakterisierung von (p,p)-Klassen

Sei X eine g-dimensionale abelsche Varietät vom Typ $(F, \varphi_1, \ldots, \varphi_g)$.

Bemerkung 6.2.6. Für die Hodge-Zerlegung in Satz 6.1.14 existieren natürliche Isomorphismen

$$H^q(\Omega^p_X) \simeq \wedge^p \Omega \otimes \wedge^q \bar{\Omega}$$

mit $\Omega := Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ und $\bar{\Omega} := Hom_{\bar{\mathbb{C}}}(V, \mathbb{C})$.

Begründung. [7] Chapter 1 §4 Theorem (4.1). $\square$

Bemerkung 6.2.7. Falls $X = V/\Lambda$ vom Typ $(F, \varphi_1, \ldots, \varphi_g)$, so existiert nach Satz 4.2.6 ein Isomorphismus

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & F & \to & \Lambda_{\mathbb{Q}} \\ & \alpha & \mapsto & \begin{pmatrix} \varphi_1(\alpha) \\ \vdots \\ \varphi_g(\alpha) \end{pmatrix} \end{array}$$

von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen. Also auch ein Isomorphismus $\varphi : F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}^n$ von $\mathbb{R}$-Vektorräumen, durch den $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ die Struktur eines $\mathbb{C}$-Vektorraums erhält. Definiere die Skalarmultiplikation durch

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} & \to & F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \\ (c, \alpha) & \mapsto & (\varphi \otimes 1)^{-1}(c \cdot (\varphi \otimes 1)(\alpha)) \end{array}$$

Die komplexen Koordinatenfunktionen z_i bilden eine Basis von $Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$. Diese entsprechen vermöge dieses Isomorphismus gerade den φ_i:

$$\begin{tikzcd}
\varphi : & F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \arrow[r] & \Lambda_{\mathbb{Q}} \\
& \alpha \otimes r \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, "\varphi_i \otimes 1"'] & \begin{pmatrix} \varphi_1(\alpha) \otimes r \\ \vdots \\ \varphi_g(\alpha) \otimes r \end{pmatrix} \arrow[d, "z_i"] \\
& & \varphi_i(\alpha) \otimes r
\end{tikzcd}$$

Andererseits entsprechen die $\mathbb{C}$-antilinearen Abbildungen gerade den $\bar{\varphi}_i$. Eine (p, q)-Klasse besteht nach Bemerkung 6.2.6 und Lemma 6.1.10 also aus Dachprodukten von jeweils p der φ_i und q der $\bar{\varphi}_i$.

Kapitel 7

Für eine elliptische Kurve E gilt $H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(E^n) = \wedge^p H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(E^n)$

In diesem Kapitel werden mit $H^i(X,\mathbb{Q})$ die Elemente aus $H^i_{DR}(X,\mathbb{C})$ bezeichnet, die unter dem De Rham Isomorphismus Elementen aus $H^i_{sing}(X,\mathbb{Q})$ entsprechen. Das Kapitel behandelt den Artikel von Murasaki, siehe [9].

7.1 Eine $\mathbb{Q}$-Basis für $H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(E^n)$

Lemma 7.1.1. Für $\alpha \in H^i(X,\mathbb{Q})$ ist $\bar{\alpha} = \alpha$.

Beweis. Es gilt

$$H^i_{DR}(X,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq H^i_{DR}(X,\mathbb{C})$$

Die komplexe Konjugation auf $H^i(X,\mathbb{C})$ ist durch

$$\begin{array}{rccc} ^{-}: & H^i(X,\mathbb{C}) & \to & H^i(X,\mathbb{C}) \\ & \alpha \simeq \alpha' \otimes c & \mapsto & \bar{\alpha} := \alpha \otimes \bar{c} \end{array}$$

gegeben. Also gilt für $\alpha \in H^i(X,\mathbb{Q}) \subseteq H^i_{DR}(X,\mathbb{R})$: $\bar{\alpha} = \alpha \otimes \bar{1} = \alpha \otimes 1 = \alpha$. □

Sei jetzt $E = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ eine elliptische Kurve, $\tau = p + \sqrt{-1}q$, $p, q \in \mathbb{R}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Definiere

$$\Lambda := (\underbrace{\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}, \cdots, \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}}_{n-mal}) \subseteq \mathbb{C}^n.$$

Betrachte das n-fache Produkt $E^n = \mathbb{C}^n/\Lambda$ der elliptischen Kurve E.

Definition 7.1.2. Sei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{C}^n$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum. Dann bildet die Menge $\{e_1, \dots, e_n, \tau e_1, \dots, \tau e_n\}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von Λ und somit auch eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}^n$. Erhalte dadurch eine Karte $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ der reellen Mannigfaltigkeit E^n. Definiere $z = (z_1, \dots, z_n)$ durch

$$z_i := x_i + \tau y_i. \tag{7.1}$$

Dies liefert eine Karte der komplexen Mannigfaltigkeit E^n.

Bemerkung 7.1.3. Nach Kapitel 6.1 bilden die Differentialformen $dx_1, \ldots, dx_n$, $dy_1, \ldots, dy_n$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $H^1(X, \mathbb{C})$. Es gilt nach Definition:

$$\begin{aligned} dz_i &= dx_i + \tau dy_i \\ d\bar{z}_i &= dx_i - \tau dy_i \\ dx_i &= \tfrac{dz_i + d\bar{z}_i}{2} \\ dy_i &= \tfrac{dz_i - d\bar{z}_i}{2\tau} \end{aligned}$$

also bilden auch die $dz_1, \ldots, dz_n, d\bar{z_1}, \ldots, d\bar{z_n}$ eine $\mathbb{C}$-Basis von $H^1(X, \mathbb{C})$. Nach Korollar 6.1.11 erhalte Basis von $H^i(X, \mathbb{C})$ aus i-fachen Dachprodukten der Basiselemente von $H^1(X, \mathbb{C})$.
Spreche von *reellen Koordinaten*, falls eine Kohomologieklasse als Produkt der Formen dx_i, dy_j geschrieben wird, in Termen der dz_i,$d\bar{z}_j$ von *komplexen Koordinaten.*

Bemerkung 7.1.4. Nach Korollar 6.1.13 bilden i-fache Dachprodukte der dx_i und dy_j eine $\mathbb{Q}$-Basis von $H^i(X, \mathbb{Q})$.

Definition 7.1.5. Führe für $1 \leq k \leq n$ und $1 \leq i < j \leq n$ die folgenden Kohomologieklassen ein:

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{1}{\bar{\tau} - \tau} dz_k \wedge d\bar{z}_k = \frac{1}{\bar{\tau} - \tau}(dx_k + \tau dy_k) \wedge (dx_k + \bar{\tau} dy_k) \\ &= dx_k \wedge dy_k \qquad (7.2) \\ U_{ij} &= \frac{1}{\bar{\tau} - \tau}(dz_i \wedge d\bar{z}_j - d\bar{z}_i \wedge dz_j) \\ &= dx_i \wedge dy_j - dy_i \wedge dx_j \qquad (7.3) \\ V_{ij} &= \frac{1}{2}(dz_i \wedge d\bar{z}_j + d\bar{z}_i \wedge dz_j) \\ &= dx_i \wedge dx_j + \frac{\tau + \bar{\tau}}{2}(dx_i \wedge dy_j + dy_i \wedge dx_j) + \tau\bar{\tau} dy_i \wedge dy_j \qquad (7.4) \end{aligned}$$

Lemma 7.1.6. Die Klassen S_k, U_{ij}, V_{ij} sind vom Typ $(1, 1)$. Die Klassen S_k und U_{ij} sind rational und die Klassen V_{ij} sind genau dann rational, wenn E komplexe Multiplikation hat.

Beweis. Korollar 6.1.15 liefert die $(1, 1)$ Eigenschaft der Klassen S_k, U_{ij}, V_{ij}. Mit Bemerkung 7.1.4 folgt die Rationalität der Klassen S_k und U_{ij}, da die Koeffizienten in ihren reellen Koordinaten rational, ja sogar ganzzahlig sind. Mit Lemma 4.3.2 folgt die Rationalität der V_{ij} (d.h. $\frac{\tau+\bar{\tau}}{2}, \tau\bar{\tau} \in \mathbb{Q}$) genau dann, wenn E komplexe Multiplikation besitzt. □

Satz 7.1.7. Falls E komplexe Multiplikation erlaubt, ist die Menge

$$\{S_k, U_{ij}, V_{ij} \mid 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq i < j \leq n\}$$

eine $\mathbb{Q}$-Basis für $H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(E^n)$. Andernfalls bildet die Menge

$$\{S_k, U_{ij} \mid 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq i < j \leq n\}$$

eine $\mathbb{Q}$-Basis für $H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(E^n)$.

Beweis. Sei $\alpha \in H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(E^n)$. Gemäß Lemma 7.1.1 gilt $\alpha = \bar{\alpha}$. Schreibe daher α als eine beliebige konjugationsinvariante Klasse:

$$\alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j + \bar{a}_{ij} d\bar{z}_i \wedge dz_j) + \sum_{1 \leq k \leq n} b_k dz_k \wedge d\bar{z}_k \quad a_{ij}, b_k \in \mathbb{C},\ \bar{b}_k = -b_k$$

Setze dann:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= a_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j + \bar{a}_{ij} d\bar{z}_i \wedge dz_j \\ \beta_k &= b_k dz_k \wedge d\bar{z}_k \end{aligned}$$

so dass

$$\alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} + \sum_{1 \leq k \leq n} \beta_k$$

gilt. In reellen Koordinaten liefert dies:

$$\begin{aligned} a_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j + \bar{a}_{ij} d\bar{z}_i \wedge dz_j &= \ldots \\ &= (a_{ij} + \bar{a}_{ij}) dx_i \wedge dx_j + (a_{ij}\bar{\tau} + \bar{a}_{ij}\tau) dx_i \wedge dy_j + \\ &\quad (a_{ij}\tau + \bar{a}_{ij}\bar{\tau}) dy_i \wedge dx_j + \\ &\quad (\tau\bar{\tau})(a_{ij} + \bar{a}_{ij}) dy_i \wedge dy_j \qquad (7.5) \\ b_k dz_k \wedge d\bar{z}_k &= \ldots \\ &= b_k(\bar{\tau} - \tau) dx_k \wedge dy_k \qquad (7.6) \end{aligned}$$

Da $i < j$, ist diese Zerlegung eindeutig. Die Koeffizienten von α_{ij} und β_k in reellen Koordinaten liefern eindeutig die Terme $dx_i \wedge dx_j$, $dx_i \wedge dy_j$, $dy_i \wedge dx_j$, $dy_i \wedge dy_j$ und $dx_k \wedge dy_k$. Die Koeffizienten der α_{ij} und β_k in reellen Koordinaten stimmen also mit denen von α überein. Da $\alpha \in H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(E^n)$, liegen die Koeffizienten von α in reellen Koordinaten schon in $\mathbb{Q}$. Also sind auch die Koeffizienten der α_{ij} und β_k in reellen Koordinaten aus $\mathbb{Q}$. In komplexen Koordinaten folgt, dass die α_{ij} und β_k vom Typ $(1,1)$ sind. Insgesamt folgt $\alpha_{ij}, \beta_k \in H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(E^n)$.
Eine leichte Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \tfrac{\bar{\tau}-\tau}{2}(a_{ij} - \bar{a}_{ij}) U_{ij} + (a_{ij} + \bar{a}_{ij}) V_{ij} \qquad 1 \leq i < j \leq n \\ \beta_k &= b_k(\bar{\tau} - \tau) S_k \qquad 1 \leq k \leq n \end{aligned} \qquad (7.7)$$

Sind diese Koeffizienten für U_{ij},V_{ij} und S_k in reellen Koordinaten alle in $\mathbb{Q}$, so folgt die Behauptung.

1. Fall: E erlaubt komplexe Multiplikation: Erhalte aus Gleichung (7.5) und Gleichung (7.6)

$$(a_{ij} + \bar{a}_{ij}) \in \mathbb{Q} \tag{7.8}$$
$$(a_{ij}\tau + \bar{a}_{ij}\bar{\tau}) \in \mathbb{Q} \tag{7.9}$$
$$(a_{ij}\bar{\tau} + \bar{a}_{ij}\tau) \in \mathbb{Q} \tag{7.10}$$
$$b_k(\bar{\tau} - \tau) \in \mathbb{Q} \tag{7.11}$$

Aus Gleichungen (7.9) und (7.10) folgt

$$((a_{ij}\bar{\tau} + \bar{a}_{ij}\tau) - (a_{ij}\tau + \bar{a}_{ij}\bar{\tau}))/2 = \frac{\bar{\tau} - \tau}{2}(a_{ij} - \bar{a}_{ij}) \in \mathbb{Q} \tag{7.12}$$

und die Gleichungen (7.8), (7.11) und (7.12) liefern die Rationalität der Koeffizienten in den Gleichungen (7.7).
2. Fall: E ohne komplexe Multiplikation: Es ist zu zeigen, dass α_{ij} nur aus den U_{ij} gebildet wird. In Gleichung (7.7) bedeutet das $a_{ij} + \bar{a}_{ij} = 0$. Angenommen, $0 \neq a_{ij} + \bar{a}_{ij} \in \mathbb{Q}$. Gleichung (7.5) liefert $(a_{ij} + \bar{a}_{ij})\tau\bar{\tau} \in \mathbb{Q}$ und es folgt $\tau\bar{\tau} \in \mathbb{Q}$. Ferner gilt mit Gleichung (7.5) $(a_{ij}\bar{\tau} + \bar{a}_{ij}\tau)$,$(a_{ij}\tau + \bar{a}_{ij}\bar{\tau}) \in \mathbb{Q}$ somit auch die Summe $(a_{ij}\bar{\tau}+\bar{a}_{ij}\tau)+(a_{ij}\tau+\bar{a}_{ij}\bar{\tau}) = (\tau+\bar{\tau})(a_{ij}+\bar{a}_{ij}) \in \mathbb{Q}$ und die Annahme liefert $(\tau+\bar{\tau}) \in \mathbb{Q}$. Also erlaubt E nach Lemma 4.3.2 komplexe Multiplikation, ein Widerspruch zur Annahme. Es folgt die Behauptung. □

7.2 Beweis des Hauptsatzes

Ziel des Abschnittes ist der Beweis des folgenden Satzes:

Satz 7.2.1. Sei $H(p,n) := \wedge^p H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(E^n)$, so gilt:

$$H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(E^n) = H(p,n).$$

Zum Beweis sind folgende Notationen hilfreich:

Notation 7.2.2. Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt.
Sei $\Gamma := \{(i_1, \ldots, i_p) \mid p \in \mathbb{N} \wedge (1 \leq p \leq n) \wedge (1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n)\}$ die Menge aller Teilsequenzen der Sequenz $(1, 2, \ldots, n)$.
Für ein Element $K = (i_1, \ldots, i_p) \in \Gamma$ definiere:

- Die *Menge der Elemente* $\{K\} := \{i_1, \ldots, i_p\}$
- Die *Länge* $\#K := p$

Falls $i_j \in \{K\}$, definiere

$$K - i_j \quad := (i_1, \ldots, \hat{i}_j, \ldots, i_p).$$

Für $K \in \Gamma$ wie oben setze

$$\begin{aligned} dx_K &:= dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \\ dy_K &:= dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_p} \\ dz_K &:= dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \\ d\overline{z}_K &:= d\overline{z}_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_{i_p}. \end{aligned}$$

Ferner sei $\Gamma_p := \{K \in \Gamma \mid \#K = p\}$. Für $\Psi \subseteq \Gamma \times \Gamma$ schreibe

$$\alpha = \sum_{\Psi} a_{KL} dz_K \wedge d\overline{z}_L := \sum_{\Psi \ni (K,L)} a_{KL} dz_K \wedge d\overline{z}_L.$$

7.2.1 Schritt 1: Reduktion auf $n = 2p$

Definition 7.2.3. Im Fall $n = 2p$ nenne ein Element $\alpha \in H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(E^n)$ vom Typ $(*)$, falls

$$\alpha = \sum_{(*)} a_{KL} dz_K \wedge d\bar{z}_L \tag{7.13}$$

mit $(*) = \{(K, L) \in \Gamma_p \times \Gamma_p \mid \{K\} \cap \{L\} = \emptyset\}$.

Die Klassen vom Typ $(*)$ tragen die wesentlichen Informationen für den Beweis von Satz 7.2.1. Unter Annahme folgender Behauptung kann man Satz 7.2.1 zeigen:

Behauptung 7.2.4. Falls $n = 2p$, so gilt für $\alpha \in H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(E^n)$ vom Typ $(*)$:

$$\alpha \in H(p, n) \quad \forall 1 \leq p \in \mathbb{N}.$$

Lemma 7.2.5. Sei $n \geq 2$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$ fest gewählt. Für

$$\alpha = \sum_{\Gamma_p \times \Gamma_p} a_{KL} dz_K \wedge d\overline{z}_L \in H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(E^n)$$

gibt es Zerlegungen

$$\alpha = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i_k}$$

wobei

$$\alpha_{i_k} = \sum_{(*i_k)} a_{KL} dz_K \wedge d\overline{z}_L$$

$$\begin{aligned} (*1_k) &= \{(K, L) \in \Gamma_p \times \Gamma_p \mid k \notin \{K\} \cup \{L\}\} \\ (*2_k) &= \{(K, L) \in \Gamma_p \times \Gamma_p \mid k \in \{K\} \cup \{L\}, k \notin \{K\} \cap \{L\}\} \\ (*3_k) &= \{(K, L) \in \Gamma_p \times \Gamma_p \mid k \in \{K\} \cap \{L\}\} \end{aligned}$$

und $\alpha_{i_k} \in H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(E^n)$.

Beweis. Als Summanden einer (p,p)-Klasse sind die α_{i_k} wieder (p,p)-Klassen. Die Rationalität folgt durch Widerspruch: Betrachte die Bilder der α_{i_k} in reellen Koordinaten:

- Die α_{1_k} werden auf $\sum c_{IJ} dx_I \wedge dy_J$ abgebildet, wobei kein k als Index auftritt.
- Die α_{2_k} werden auf $\sum d_{IJ} dx_I \wedge dy_J$ abgebildet, wobei entweder dx_k oder dy_k in $dx_I \wedge dy_J$ vorkommen.
- Die α_{3_k} werden auf $\sum e_{IJ} dx_I \wedge dy_J$ abgebildet, wobei dx_k und dy_k in $dx_I \wedge dy_J$ auftreten.

Angenommen, eine Klasse α_{i_k} ist nicht rational, so ist mindestens ein Koeffizient dieser Klasse $\notin \mathbb{Q}$. Da in den anderen α_{i_k} Klassen die gleiche $dx_I \wedge dy_J$ Kombination nicht vorkommt, tritt der entsprechende Koeffizient auch in der Summe, also in α, auf und α ist nicht rational. Also gilt: α rational $\Rightarrow$ alle α_{i_k} rational. $\square$

Beweis von Satz 7.2.1 unter Annahme von Behauptung 7.2.4. Durch Induktion über n.
Induktionsanfang: $n = 1$ Aus Dimensionsgründen gibt es auf einer elliptischen Kurve $E = E^1$ nur $(1,1)$-Formen, alle anderen (p,p)-Formen verschwinden für $p \geq 2$, also gilt $H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(E^1) = H(p,1)$.
Sei nun $n \geq 2$. Für $k = n$ liefert Lemma 7.2.5 die Zerlegung $\alpha = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i_n}$ mit $\alpha_{i_n} \in H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(E^n)$. Die Behauptung folgt, wenn alle α_{i_n} in $H(p,n)$ liegen.
Die Form α_{1_n} enthält keine z_n oder $\bar{z}_n$ -Terme, kann also als Element von $H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(E^{n-1})$ aufgefasst werden $\overset{I.A.}{\Rightarrow} \alpha_{1_n} \in H(p,n-1)$. Nach Definition gilt $H(p,n-1) \subseteq H(p,n)$. Dies liefert $\alpha_{1_n} \in H(p,n)$.
Betrachtet man die Klasse α_{3_n} und setzt $\alpha'_{3_n} = \sum_{*3_n} (\bar{\tau} - \tau) a_{KL} dz_{K-n} \wedge d\bar{z}_{L-n}$, so gilt $\alpha_3 = (-1)^{p-1} S_n \wedge \alpha'_3$, da $2(p-1)$ Vertauschungen für $d\bar{z}_n$, $(p-1)$ Vertauschungen für dz_n nötig sind. In α'_{3_n} wird der Index n jeweils aus den dz und den $d\bar{z}$ herausgenommen, somit ist α'_{3_n} vom Typ $(p-1,p-1)$. Da die Koeffizienten von S_n in reellen Koordinaten 1 sind, stimmen die Koeffizienten von α'_{3_n} mit denen von α_{3_n} überein und somit $\alpha'_3 \in H^{p-1,p-1}_{\mathbb{Q}}(E^{n-1})$. Nach Induktionsannahme folgt $\alpha'_3 \in H(p-1,n-1)$. Wie oben gilt die Inklusion $H(p-1,n-1) \subset H(p-1,n)$, also $\alpha'_3 \in H(p-1,n)$ und somit $\alpha_3 = (-1)^{p-1} S_n \wedge \alpha'_3 \in H(p,n)$.
Die Klasse α_2 ist nun nach Lemma 7.2.5 im Index $(n-1)$ wie folgt zusammengesetzt: $\alpha_{2_n} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{2_n i_{n-1}}$ mit $\alpha_{2_n i_{n-1}} = \sum_{(*2_n i)} a_{KL} dz_K \wedge d\bar{z}_L$ und:

$$
\begin{aligned}
(*2_n 1_{n-1}) &= \{(K,L) \in (*2_n) \mid n-1 \notin \{K\} \cup \{L\}\} \\
(*2_n 2_{n-1}) &= \{(K,L) \in (*2_n) \mid n-1 \in \{K\} \cup \{L\}, n-1 \notin \{K\} \cap \{L\}\} \\
(*2_n 3_{n-1}) &= \{(K,L) \in (*2_n) \mid n-1 \in \{K\} \cap \{L\}\}
\end{aligned}
$$

Mit den Argumenten wie schon für α_{1_n} und α_{3_n} folgt auch $\alpha_{2_n 1_{n-1}} \in H(p,n)$ und $\alpha_{2_n 3_{n-1}} \in H(p,n)$. Iterativ folgt, dass mit Ausnahme der Teilklasse $\alpha_{2_n 2_{n-1} \cdots 2_2 2_1}$ alle Teilklassen von α in $H(p,n)$ liegen.

Es bleibt zu zeigen, dass für $2p = n$ die Teilklasse $\alpha_{2_n 2_{n-1} \cdots 2_2 2_1}$ schon vom Typ $(*)$ ist und für $2p \neq n$ keine Klassen existieren:
Im Fall $2p < n$ können nicht alle Indizes $(1, \cdots, n)$ in (L, K) vorhanden sein, das heißt die Indexmenge $(*2_n 2_{n-1} \cdots 2_2 2_1)$ ist die leere Menge.
Im Fall $2p > n$ müsste mindestens ein Index in K und L vorkommen. Widerspruch zur Konstruktion, also auch leere Indexmenge.
Im Fall $2p = n$ ist $\alpha_{2 \cdots 2}$ vom Typ $(*)$, da für alle $1 \leq i \leq n$ nach Konstruktion $i \notin \{K\} \cap \{L\}$ gilt, daher $\{K\} \cap \{L\} = \emptyset$. Deshalb folgt das Theorem aus Behauptung 7.2.4. $\square$

7.2.2 Schritt 2: Fundamentales Lemma

Wie in Schritt 1 gesehen reicht es, den Fall $n = 2p$ und α vom Typ $(*)$ zu betrachten. Sei von nun an $n = 2p$.

Notation 7.2.6. Für ein Element $K \in \Gamma_p$ bezeichne $K' \in \Gamma_p$ das Komplement von K in der Sequenz $(1, 2, \ldots, n)$, das heißt $\{K\} \cup \{L\} = \{1, 2, \cdots, n\}$.
Weiterhin gibt es für zwei Elemente $K = (i_1, \cdots, i_p)$, $L = (j_1, \cdots, j_p) \in \Gamma$ mit der Eigenschaft $\{K\} \cap \{L\} = \emptyset$ ein eindeutiges Element $M = (k_1, \cdots, k_n) \in \Gamma$, so dass $\{M\} = \{K\} \cup \{L\}$. Schreibe $sign(\sigma)$ für die Signatur der Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1, & \cdots, i_p, j_1, \cdots & , j_p \\ k_1, & \cdots\cdots & , k_n \end{pmatrix}$$

und $[K, \bar{L}]$ für das Element $sign(\sigma)(dz_K \wedge d\bar{z}_L) \in H^{p,p}(E^n)$. Nehme somit die auftretenden Indizes immer als aufsteigend geordnet an. Ferner definiere

$$\begin{aligned} \Gamma_p \ni i_i, \cdots, i_q &:= \{K \in \Gamma_p \mid i_1, \cdots, i_q \in \{K\}\} \\ \Gamma_p \not\ni j_1, \cdots, j_r &:= \{K \in \Gamma_p \mid j_1, \cdots, j_r \notin \{K\}\} \end{aligned}$$

und

$$\Gamma_p \ni i_i, \cdots, i_q; \Gamma_p \not\ni j_1, \cdots, j_r \quad := \{K \in \Gamma_p \mid i_1, \cdots, i_q \in \{K\} \wedge j_1, \cdots, j_r \notin \{K\}\}.$$

Mit diesen Notationen schreibe eine Form α vom Typ $(*)$ eindeutig als

$$\alpha = \sum_{\Gamma_p \ni 1} (a_{KK'}[K, \bar{K}'] + \bar{a}_{KK'}[K', \bar{K}]) \tag{7.14}$$

wobei $a_{KK'}$ wieder eine komplexe Zahl ist. Die Wahl $1 \in \Gamma_p$ ist willkürlich und dient der Eindeutigkeit. Andernfalls kann eine Sequenz als K und als K' auftreten.
Ist α in der obigen Darstellung, so setze:

$$\begin{aligned} \alpha_{1j} &= (\bar{\tau} - \tau)(-1)^j \sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (\bar{a}_{KK'}[K' - j, \overline{K - 1}] - a_{KK'}[K - 1, \overline{K' - j}]) \\ \beta_{1j} &= 2(-1)^j \sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (\bar{a}_{KK'}[K' - j, \overline{K - 1}] + a_{KK'}[K - 1, \overline{K' - j}]) \\ \gamma_j &= \sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (a_{KK'}[K, \overline{K'}] + \bar{a}_{KK'}[K', \overline{K}]) \end{aligned}$$

und erhalte folgendes Lemma:

Lemma 7.2.7. Für eine Form α vom Typ $(*) \in H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(E^n)$ wie in Gleichung (7.14) und $(1 \le k \le n)$, $(1 \le i < j \le n)$ gilt:

$$\begin{aligned}
U_{ij} \wedge \alpha &= S_1 \wedge S_j \wedge \alpha_{1j} && (7.15)\\
U_{1j} \wedge \alpha_{1j} &= -\gamma_j + (-1)^j \sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (\bar{a}_{KK'} dz_1 \wedge d\bar{z}_j \wedge [K'-j, \overline{K-1}] \\
&\quad + a_{KK'} d\bar{z}_1 \wedge dz_j \wedge [K-1, \overline{K'-j}]) && (7.16)\\
V_{1j} \wedge \alpha &= \left(\frac{\bar{\tau}-\tau}{2}\right)^2 S_1 \wedge S_j \wedge \beta_{1j} && (7.17)\\
V_{1j} \wedge \beta_{1j} &= \gamma_j + (-1)^j \sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (\bar{a}_{KK'} dz_1 \wedge d\bar{z}_j \wedge [K'-j, \overline{K-1}] \\
&\quad + a_{KK'} d\bar{z}_1 \wedge dz_j \wedge [K-1, \overline{K'-j}]) && (7.18)\\
\sum_{j=2}^{n} \gamma_j &= p\alpha && (7.19)
\end{aligned}$$

Beweis. Gleichung (7.15):

$$\begin{aligned}
S_j \wedge \alpha_{1j} &= \tfrac{1}{\bar{\tau}-\tau} dz_j \wedge d\bar{z}_j \wedge (\bar{\tau}-\tau)(-1)^j \textstyle\sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (\bar{a}_{KK'}[K'-j, \overline{K-1}] - a_{KK'}[K-1, \overline{K'-j}])\\
&= (-1)^j \textstyle\sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} ((-1)^{j-1} \bar{a}_{KK'} d\bar{z}_j \wedge [K', \overline{K-1}] - (-1)^{j-2} a_{KK'} dz_j \wedge [K-1, \overline{K'}])\\
&= \textstyle\sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (-\bar{a}_{KK'} d\bar{z}_j \wedge [K', \overline{K-1}] - a_{KK'} dz_j \wedge [K-1, \overline{K'}])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1 \wedge S_j \wedge \alpha_{1j} &= \tfrac{1}{\bar{\tau}-\tau} \textstyle\sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (-\bar{a}_{KK'} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_j \wedge [K', \overline{K-1}] - a_{KK'} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_j \wedge [K-1, \overline{K'}])\\
&= \tfrac{1}{\bar{\tau}-\tau} \textstyle\sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (\bar{a}_{KK'} dz_1 \wedge d\bar{z}_j \wedge [K', \overline{K}] - a_{KK'} d\bar{z}_1 \wedge dz_j \wedge [K, \overline{K'}])
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
U_{1j} \wedge \alpha &= \tfrac{1}{\bar{\tau}-\tau} (dz_1 \wedge d\bar{z}_j - d\bar{z}_1 \wedge dz_j) \wedge \textstyle\sum_{\Gamma_p \ni 1} (a_{KK'}[K, \bar{K}'] + \bar{a}_{KK'}[K', \bar{K}])\\
&= \tfrac{1}{\bar{\tau}-\tau} \textstyle\sum_{\Gamma_p \ni 1} (a_{KK'} dz_1 \wedge d\bar{z}_j \wedge [K, \bar{K}'] - a_{KK'} d\bar{z}_1 \wedge dz_j \wedge [K, \bar{K}']\\
&\quad + \bar{a}_{KK'} dz_1 \wedge d\bar{z}_j \wedge [K', \bar{K}] - \bar{a}_{KK'} d\bar{z}_1 \wedge dz_j \wedge [K', \bar{K}])\\
&\overset{1 \in K}{=} \tfrac{1}{\bar{\tau}-\tau} \textstyle\sum_{\Gamma_p \ni 1} (\bar{a}_{KK'} dz_1 \wedge d\bar{z}_j \wedge [K', \bar{K}] - a_{KK'} d\bar{z}_1 \wedge dz_j \wedge [K, \bar{K}'])
\end{aligned}$$

Für alle K mit $j \in K$ gilt $U_{1j} \wedge \alpha = 0$, also $U_{ij} \wedge \alpha = S_1 \wedge S_j \wedge \alpha_{1j}$.
Gleichung (7.16):

$$\begin{aligned}
U_{1j} \wedge \alpha_{1j} &= \tfrac{1}{\bar{\tau}-\tau} (dz_1 \wedge d\bar{z}_j - d\bar{z}_1 \wedge dz_j) \wedge (\bar{\tau}-\tau)(-1)^j \textstyle\sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (\bar{a}_{KK'}[K'-j, \overline{K-1}] - a_{KK'}[K-1, \overline{K'-j}])\\
&= (-1)^j \textstyle\sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (\bar{a}_{KK'} dz_1 \wedge d\bar{z}_j \wedge [K'-j, \overline{K-1}] - (-1)^{j-2} a_{KK'} \wedge [K, \overline{K'}]\\
&\quad -(-1)^{j-2} \bar{a}_{KK'} \wedge [K', \overline{K}] + a_{KK'} d\bar{z}_1 \wedge dz_j \wedge [K-1, \overline{K'-j}])\\
&= \underbrace{- \sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (a_{KK'}[K, \overline{K'}] + \bar{a}_{KK'}[K', \overline{K}])}_{\gamma_j}\\
&\quad +(-1)^j \textstyle\sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (\bar{a}_{KK'} dz_1 \wedge d\bar{z}_j \wedge [K'-j, \overline{K-1}] + a_{KK'} d\bar{z}_1 \wedge dz_j \wedge [K-1, \overline{K'-j}])
\end{aligned}$$

Gleichung (7.17):

$$\begin{aligned}
V_{1j} \wedge \alpha &= \tfrac{1}{2} (dz_1 \wedge d\bar{z}_j + d\bar{z}_1 \wedge dz_j) \wedge \textstyle\sum_{\Gamma_p \ni 1} (a_{KK'}[K, \bar{K}'] + \bar{a}_{KK'}[K', \bar{K}])\\
&\overset{1 \in \{K\}}{=} \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{\Gamma_p \ni 1} (\bar{a}_{KK'} dz_1 \wedge d\bar{z}_j \wedge [K', \bar{K}] + a_{KK'} d\bar{z}_1 \wedge dz_j \wedge [K, \bar{K}'])
\end{aligned}$$

Ferner kann bei der Summe noch die Bedingung $\Gamma_p \not\ni j$ hinzugenommen werden, da sonst $j \in K$ und $V_{1j} \wedge \alpha = 0$.

$$\begin{array}{lcl}
S_j \wedge \beta_{1j} & = & \frac{1}{\bar\tau-\tau} dz_j \wedge d\bar z_j \wedge 2(-1)^j \sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (\bar a_{KK'}[K'-j, \overline{K-1}] + a_{KK'}[K-1, \overline{K'-j}]) \\
 & = & \frac{2}{\bar\tau-\tau}(-1)^j \sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} ((-1)^{j-1} \bar a_{KK'} d\bar z_j \wedge [K', \overline{K-1}] + (-1)^{j-2} a_{KK'} dz_j \wedge [K-1, \overline{K'}]) \\
S_1 \wedge S_j \wedge \beta_{1j} & = & \frac{1}{\bar\tau-\tau} dz_1 \wedge d\bar z_1 \wedge \frac{2}{\bar\tau-\tau} \sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (-\bar a_{KK'} d\bar z_j \wedge [K', \overline{K-1}] + a_{KK'} dz_j \wedge [K-1, \overline{K'}]) \\
 & = & \frac{2}{(\bar\tau-\tau)^2} \underbrace{\sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (\bar a_{KK'} dz_1 \wedge d\bar z_j \wedge [K', \overline{K}] + a_{KK'} d\bar z_1 \wedge dz_j \wedge [K, \overline{K'}])}_{2V_{ij} \wedge \alpha} \\
 & = & (\frac{2}{\bar\tau-\tau})^2 V_{ij} \wedge \alpha
\end{array}$$

Gleichung (7.18):

$$\begin{array}{lcl}
V_{1j} \wedge \beta_{1j} & = & \frac{1}{2}(dz_1 \wedge \bar z_j + d\bar z_1 \wedge dz_j) \wedge 2(-1)^j \sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (\bar a_{KK'}[K'-j, \overline{K-1}] + a_{KK'}[K-1, \overline{K'-j}]) \\
 & = & \sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} ((-1)^j \bar a_{KK'} dz_1 \wedge \bar z_j \wedge [K'-j, \overline{K-1}] + a_{KK'}[K, \overline{K'}] + \\
 & & \bar a_{KK'}[K', \overline{K}] + (-1)^j a_{KK'} d\bar z_1 \wedge dz_j \wedge [K-1, \overline{K'-j}]) \\
 & = & \gamma_j + (-1)^j \sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (\bar a_{KK'} dz_1 \wedge \bar z_j \wedge [K'-j, \overline{K-1}] + a_{KK'} d\bar z_1 \wedge dz_j \wedge [K-1, \overline{K'-j}]))
\end{array}$$

Gleichung (7.19):

$$\sum_{j=2}^n \gamma_j \overset{n=2p}{=} \sum_{j=2}^{2p} \sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (a_{KK'}[K, \overline{K'}] + \bar a_{KK'}[K', \overline{K}])$$

Die Behauptung folgt so: Wähle ein festes $K \in \Gamma_p$ mit $1 \in K$. Das Komplement K' ist nach Definition eine Sequenz aus p Elementen. Daher tritt das entsprechende j in obiger Formel p-mal in K', also nicht in K auf. Es ergibt sich die gewünschte Gleichung. □

7.2.3 Schritt 3: Beweis der Behauptung für E mit komplexer Multiplikation

Zeige Behauptung 7.2.4, falls E komplexe Multiplikation besitzt, durch Induktion über p. Sei $\alpha \in H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(E^n)$ eine Form vom Typ $(*)$, wie in Gleichung (7.14) gegeben.

Beweis. Im Fall $p = 1$ und $n = 2p = 2$ ist Behauptung 7.2.4 nach Definition erfüllt $(H(1,2) = H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(E^2))$.
Sei $p \geq 2$. Da $U_{ij} \in H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(E^n)$ und $\alpha \in H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(E^n)$ liegen alle Koeffizienten der reellen Koordinaten von $U_{ij} \wedge \alpha$ wieder in $\mathbb{Q}$.
Mit Lemma 7.2.7, Gleichung (7.15), gilt

$$U_{ij} \wedge \alpha = S_1 \wedge S_j \wedge \alpha_{1j}.$$

Da die Koeffizienten der reellen Koordinaten von S_1 und S_j jeweils 1 sind, liegen auch die Koeffizienten von α_{1j} in $\mathbb{Q}$. Da α_{ij} nach Definition eine $(p-1,p-1)$-Klasse ist, folgt

$$\alpha_{1j} \in H^{p-1,p-1}_{\mathbb{Q}}(E^{n-2}).$$

Die Einschränkung auf E^{n-2} gilt, da dz_1 und dz_j in α_{1j} nicht vorkommen.
Nach Induktionsannahme gilt $a_{1j} \in H(p-1, n-2)$. Aus $H(p-1,n-2) \subseteq H(p-1,n)$ folgt $U_{1j} \wedge \alpha_{1j} \in H(p,n)$.

Da $V_{ij} \in H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(E^n)$ und $\alpha \in H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(E^n)$ liegen alle Koeffizienten der reellen Koordinaten von $U_{ij} \wedge \alpha$ wieder in $\mathbb{Q}$. Da E komplexe Multiplikation besitzt, unterscheiden sich die Koeffizienten der reellen Koordinaten von β_{1j} nach Gleichung (7.17) von denen von $V_{1j} \wedge \alpha$ nur um eine rationale Zahl, sind also auch rational. Es folgt wiederum $\beta_{1j} \in H^{p-1,p-1}_{\mathbb{Q}}(E^{n-2})$, da β_{1j} nach Definition (p,p)-Klasse. Nach Induktionsannahme gilt $\beta_{1j} \in H(p-1, n-2)$, folglich $V_{1j} \wedge \beta_{1j} \in H(p,n)$. Mit den Gleichungen (7.16), (7.18) und (7.19) folgt

$$\sum_{j=2}^{n} (V_{1j} \wedge \beta_{1j} - U_{1j} \wedge \alpha_{1j}) = 2 \sum_{j=2}^{n} \gamma_j = 2p\alpha \in H(p,n).$$

Es folgt Behauptung 7.2.4. □

7.2.4 Schritt 4: Beweis der Behauptung für E ohne komplexe Multiplikation

Dieser Schritt ist etwas schwieriger als Schritt 3, da die β_{1j} und V_{ij} in Lemma 7.2.7 nicht rational sind. Der Beweis erfolgt wie im Fall mit komplexer Multiplikation durch Induktion über p.
Der Induktionsanfang bleibt wie in 7.2.3.
Für $p \geq 2$ sei $\alpha \in H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(E^n)$ wieder eine Form vom Typ $(*)$, wie in Gleichung (7.14) gegeben. Mit den Gleichungen (7.16) und (7.19) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=2}^{n} U_{1j} \wedge \alpha_{1j} &= -\textstyle\sum_{j=2}^{n} \gamma_j \\ &\quad + \textstyle\sum_{j=2}^{n} \sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni j} (-1)^j \quad (\bar{a}_{KK'} dz_1 \wedge d\bar{z}_j \wedge [K'-j, \overline{K-1}] \\ &\qquad\qquad + a_{KK'} d\bar{z}_1 \wedge dz_j \wedge [K-1, \overline{K'-j}]) \\ &= -p\alpha + \alpha' \end{aligned} \tag{7.20}$$

wobei

$$\begin{aligned} \alpha' &= \textstyle\sum_{\Gamma_p \ni 1} (a'_{LL'} [L, \bar{L}'] + \bar{a}'_{LL'} [L', \bar{L}]) \\ a'_{LL'} &= \textstyle\sum_{\mathcal{L}} \bar{a}_{KK'} \\ \mathcal{L} &= \{K \in (\Gamma_p \ni 1) \mid \exists j \in L' : K' - j = L - 1\} \end{aligned}$$

Erläuterung: Um aus $dz_1 \wedge d\bar{z}_j \wedge [K'-j, \overline{K-1}]$ ein Element der Form $[L, \bar{L}']$ zu erhalten, muss $L = (1, k'_1, \ldots, k'_{p-1})$ für $K'-j = (k'_1, \ldots, k'_{p-1})$ gelten. Da die Indexmenge $[K'-j, \overline{K-1}]$ nach Definition geordnet ist, kann $d\bar{z}_j$ durch $j-2$ Vertauschungen an die richtige Stelle in $[L, \bar{L}']$ gebracht werden, also unterscheiden sich die Vorzeichen um $(-1)^j$.
Unter Annahme folgender Behauptung lässt sich der Satz 7.2.1 im Fall ohne komplexer Multiplikation beweisen:

Behauptung 7.2.8. $\alpha' = -\alpha \quad \forall p \geq 2$

Wie in Schritt 7.2.3 erhalte $\alpha_{1j} \in H(p-1, n-2)$. Nach Definition gilt $U_{1j} \in H(1,2)$. Also auch $\sum_{j=2}^{n} U_{1j} \wedge \alpha_{1j} \in H(p,n)$. Mit Behauptung 7.2.8 folgt aus Gleichung (7.20):

$$\alpha = -\frac{\sum_{j=2}^{n} U_{1j} \wedge \alpha_{1j}}{(p+1)} \in H(p,n).$$

Es reicht somit, Behauptung 7.2.8 zu zeigen, dann folgen Behauptung 7.2.4 und Satz 7.2.1.
Dazu die folgenden beiden Lemmata:

Lemma 7.2.9. Schreibe ein Element $\alpha \in H_{\mathbb{Q}}^{2,2}(E^4)$ vom Typ $(*)$ als

$$\alpha = a[12\overline{34}] + \bar{a}[34\overline{12}] + b[13\overline{24}] + \bar{b}[24\overline{13}] + c[14\overline{23}] + \bar{c}[23\overline{14}],$$

so gilt a, b, $c \in \mathbb{R}$ und $a + b + c = 0$.

Beweis. Nach Lemma 7.2.7 gilt, wie schon in Schritt 7.2.3 gesehen, für $\alpha \in H_{\mathbb{Q}}^{2,2}(E^4)$: $\alpha_{12} \in H_{\mathbb{Q}}^{1,1}(E^2)$. Nach Satz 7.1.7 muss α_{12} eine $\mathbb{Q}$-Linearkombination der Basiselemente S_i und U_{ij} sein. Da aber in keinem anderen Basiselement als U_{34} die $[3,\bar{4}]$- bzw. $[4,\bar{3}]$-Terme vorkommen, muss

$$\alpha_{12} \overset{Def.}{=} (\bar{\tau} - \tau)\{(-b + \bar{c})[3,\bar{4}] + (\bar{b} - c)[4\bar{3}]\} = qU_{34} \overset{Def.}{=} \frac{q}{\bar{\tau} - \tau}([3\bar{4}] - [4\bar{3}])$$

mit $q \in \mathbb{Q}$ gelten. Koeffizientenvergleich liefert:

$$(\bar{\tau} - \tau)(-b + \bar{c}) = (\bar{\tau} - \tau)(c - \bar{b}) = \frac{q}{\bar{\tau} - \tau}. \tag{7.21}$$

Es folgt $(\bar{\tau}-\tau)(-b+\bar{c}-c+\bar{b}) = -2Im(\tau)(-b+\bar{c}-c+\bar{b}) = 0 \overset{Im\tau \neq 0}{\Rightarrow} -Im(b) = Im(c)$ und analog für α_{13} und α_{14}: $-Im(c) = Im(a)$ und $-Im(a) = Im(b)$. Insgesamt gilt $Im(a) = Im(b) = Im(c) = 0$, also der erste Teil des Lemmas.
Sei nun α in komplexen Koordinaten

$$\alpha = a([12\overline{34}] + [34\overline{12}]) + b([13\overline{24}] + [24\overline{13}]) + c([14\overline{23}] + [23\overline{14}]) \tag{7.22}$$

gegeben.
Betrachte die reellen Koordinaten von α. Die $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$ entstehen aus jedem einzelnen Summanden in (7.22) ohne weiteren Faktor, wohingegen die Form $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dy_4$ von den Summanden $[34\overline{12}]$, $[24\overline{13}]$ und $[14\overline{23}]$ den Faktor τ und von der anderen Hälfte der Summanden den Faktor $\bar{\tau}$ erhält. Ferner bekommt die Form $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_3 \wedge dy_4$ von $[12\overline{34}]$ den Faktor $\bar{\tau}^2$, von $[34\overline{12}]$ entsprechend τ^2, von allen anderen Summanden jeweils den Faktor $\tau\bar{\tau}$. Insgesamt erhalte folgende Tabelle:

Form	Koeffizient
$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$	$2(a + b + c)$
$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dy_4$	$(a + b + c)(\tau + \bar{\tau})$
$dx_1 \wedge dx_2 \wedge dy_3 \wedge dy_4$	$a(\tau^2 + \bar{\tau}^2) + (b + c)2\tau\bar{\tau}$
$dx_1 \wedge dy_2 \wedge dx_3 \wedge dy_4$	$b(\tau^2 + \bar{\tau}^2) + (c + a)2\tau\bar{\tau}$
$dx_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \wedge dx_4$	$c(\tau^2 + \bar{\tau}^2) + (a + b)2\tau\bar{\tau}$

Die Koeffizienten sind jeweils rationale Zahlen. Daher liefert die erste Gleichung $(a+b+c) \in \mathbb{Q}$. Angenommen $(a+b+c) \neq 0$, so liefert die zweite Gleichung $(\tau+\bar{\tau}) \in \mathbb{Q}$. Die Summe der letzten drei Koeffizienten ergibt

$$4\tau\bar{\tau}(a+b+c) + (\tau+\bar{\tau})^2(a+b+c) \in \mathbb{Q}.$$

Mit erster und zweiter Gleichung liefert dies $\tau\bar{\tau} \in \mathbb{Q}$. Mit Lemma 4.3.2 folgt, dass E komplexe Multiplikation erlaubt. Im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt $a+b+c=0$. $\square$

Lemma 7.2.10. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $p \geq 2$. Wenn eine Form $\alpha \in H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(E^n)$ vom Typ $(*)$ als $\alpha = \sum_{\Gamma_p \ni 1}(\lambda[K, \bar{K}'] + \bar{\lambda}[K', \bar{K}])$ geschrieben werden kann, so gilt $\alpha = 0$.

Beweis. Induktion über p.
Im Fall $p=2$ folgt mit $a=b=c=\lambda$ aus Lemma 7.2.9: $3\lambda = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.
Im Fall $p \geq 3$ sei $\alpha = \sum_{\Gamma_p \ni 1} \lambda[K, \bar{K}'] + \bar{\lambda}[K', \bar{K}]$. Betrachte die Form:

$$\begin{aligned}
\alpha_{12} &\overset{Def.,Vor.}{=} (\bar{\tau}-\tau) \sum_{\Gamma_p \ni 1; \Gamma_p \not\ni 2} (\bar{\lambda}[K'-2, \overline{K-1}] - \lambda[K-1, \overline{K'-2}]) \\
&= \sum_{\Gamma' \ni 3} \{(\bar{\tau}-\tau)(\bar{\lambda}-\lambda)[L, \bar{L}'] + (\bar{\tau}-\tau)(\bar{\lambda}-\lambda)[L', \bar{L}]\}
\end{aligned}$$

Es bezeichne Γ' die Menge der Untersequenzen der Länge $(p-1)$ der Sequenz $(3, 4, \cdots, n)$. Wie schon in Schritt 7.2.3 gesehen, ist $\alpha_{12} \in H^{p-1,p-1}_{\mathbb{Q}}(E^{n-2})$. Weiterhin ist α_{12} vom Typ $(*)$ (Wähle Isomorphismus von (3,4,...,n) auf (1,2,...,n-2)) und von der in der Voraussetzung geforderten Form $(\overline{(\bar{\tau}-\tau)(\bar{\lambda}-\lambda)} = (\bar{\tau}-\tau)(\bar{\lambda}-\lambda))$. Also folgt mit Induktion $\alpha_{12} = 0$ und somit $(\bar{\tau}-\tau)(\bar{\lambda}-\lambda) = 0$. Daraus erhalte $Im(\lambda) = 0$, da für τ als Gitterkonstante $Im(\tau) \neq 0$ gilt. Mit $\lambda = \bar{\lambda}$ habe $\alpha = \sum_{\Gamma_p \ni 1}(\lambda[K, \bar{K}'] + \lambda[K', \bar{K}])$. Erhalte mittels Kombinatorik folgende Koeffizienten für die angegebenen Formen in der reellen Darstellung:

Form	Koeffizient
$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \wedge dx_n$	$2A\lambda$
$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} \wedge dy_n$	$B\lambda(\tau+\bar{\tau})$
$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{n-2} \wedge dy_{n-1} \wedge dy_n$	$C\lambda(\tau^2+\bar{\tau}^2) + (4\tau\bar{\tau})D\lambda$

Die Konstanten ergeben sich als:

- $A := \binom{n-1}{p-1}$ Wähle $p-1$ Elemente aus $(2, 3, \ldots, n)$ und füge die 1 zu diesen Elementen hinzu. Erhalte auf diese Weise alle p-elementigen Teilmengen von $(1, \ldots, n)$, die 1 enthalten.
- $B := \binom{n-2}{p-2} + \binom{n-2}{p-1} = \binom{n-1}{p-1}$ Hier müssen die Teilmengen mit 1 einmal ohne und einmal mit n betrachtet werden. Ziehe immer aus $n-2$, da 1 und n von der Ziehung ausgespart werden. Die $p-1$ gezogenen Elemente sind die ohne n, den $p-2$ gezogenen wird n hinzugefügt.

- $C := \binom{n-3}{p-3} + \binom{n-3}{p-1}$ Wieder entsprechende Ziehungen für y_{n-1}, $y_n \in K$ bzw. $\notin K$.
- $D := \binom{n-3}{p-2}$ Hier fordere y_{n-1} oder $y_n \in K$, nicht aber beide gleichzeitig.

Angenommen, $\lambda \neq 0$. Alle Koeffizienten von α sind wieder in $\mathbb{Q}$. Es folgt $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\tau + \bar{\tau} \in \mathbb{Q}$ und

$$C(\tau^2+\bar{\tau}^2)+(4\tau\bar{\tau})D = C[(\tau+\bar{\tau})^2-2\tau\bar{\tau}]+(4\tau\bar{\tau})D = C(\tau+\bar{\tau})^2+2\tau\bar{\tau}(2D-C) \in \mathbb{Q},$$

also auch $\tau\bar{\tau} \in \mathbb{Q}$. Mit Lemma 4.3.2 folgt wiederum τ imaginär quadratisch. Widerspruch. Also $\alpha = 0$. $\square$

Zeige nun Behauptung 7.2.8.

Beweis von Behauptung 7.2.8. Seien α und α' wie in (7.14) und (7.20) gegeben. Definere $\lambda_\alpha := \alpha + \alpha'$ Da sowohl α als auch α' vom Typ $(*)$ sind, gilt dies auch für λ_α. Schreibe gemäß (7.14) $\lambda_\alpha = \sum_{\Gamma_p \ni 1}(\lambda_{\alpha,LL'}[L,\bar{L}']+\bar{\lambda}_{\alpha,LL'}[L',\bar{L}])$. Gilt Behauptung 7.2.8, so erhalte $\lambda_\alpha = 0$. In Termen der Koeffizienten von λ_α ist dies äquivalent zu $\lambda_{\alpha,LL'} = a_{LL'} + a'_{LL'} = 0 \ \forall L \in (\Gamma_p \ni 1)$.
Zeige $\lambda_{\alpha,LL'} = 0 \ \forall L \in (\Gamma_p \ni 1)$ durch Induktion über p:
Sei $p = 2$, $L = (1,2)$ und α wie in Lemma 7.2.9 gewählt. Habe $L' = (3,4)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&a_{LL'} = a\\
&\mathcal{L} = \{K \in (\Gamma_p \ni 1) \mid \exists j \in K' : K' - j = L - 1\} \overset{L-1=(2)}{=} \{\underbrace{(1,4)}_{j=3}, \underbrace{(1,3)}_{j=4}\}\\
&a'_{LL'} = \bar{a}_{13\overline{24}} + \bar{a}_{14\overline{23}} = \bar{b} + \bar{c}
\end{aligned}$$

und es folgt mit Lemma 7.2.9 $\lambda_{\alpha,LL'} = 0$. Für die anderen $L \in (\Gamma_2 \ni 1)$ erhalte analog $\lambda_{\alpha,LL'} = 0$.
Sei nun $p \geq 3$. Für beliebige K,$L \in (\Gamma_p \ni 1)$ finde immer eine Kette von Elementen $L_i \in (\Gamma_p \ni 1)$, so dass $(L = L_0)L_1 \ldots L_{J-1}(L_J = K)$ und sich L_{j-1} und L_j nur um ein Element unterscheiden für alle $1 \leq j \leq J$. Es genügt also zu zeigen, dass $\lambda_{\alpha,LL'} = \lambda_{\alpha,KK'}$ für L, $K \in (\Gamma_p \ni 1)$, wobei die Mengen K und L bis auf ein Element übereinstimmen. Dies sei nun exemplarisch für $L_1 = (1,2,\ldots,p-1,p)$ und $L_2 = (1,2,\ldots,p-1,n)$ gezeigt. Die anderen Fälle folgen analog, wenn man die Indexmengen entsprechend vertauscht.
Nach Induktionsannahme gilt $\lambda_{MM'} = 0 \ \forall \# M = p-1$. Setzte

$$\begin{aligned}
\beta \;=\; (\bar{\tau}-\tau)\Bigg\{ &\sum_{\Gamma_p \ni 1,n;\Gamma_p \not\ni p} a_{KK'}[K-n,\overline{K'-p}] - \sum_{\Gamma_p \ni 1,p;\Gamma_p \not\ni n} a_{KK'}[K-p,\overline{K'-n}]\\
&+ \sum_{\Gamma_p \ni 1,p;\Gamma_p \not\ni n} \bar{a}_{KK'}[K'-n,\overline{K-p}] - \sum_{\Gamma_p \ni 1,n;\Gamma_p \not\ni p} \bar{a}_{KK'}[K'-p,\overline{K-n}]\Bigg\}
\end{aligned}$$

Es gilt wiederum mit den Methoden des Beweises von Lemma 7.2.7

$$U_{pn} \wedge \alpha = (-1)^{p+1} S_p \wedge S_n \wedge \beta$$

und $\beta \in H_{\mathbb{Q}}^{p-1,p-1}(E^{n-2})$. Weiterhin gilt

$$\beta = \sum_{\Gamma'' \ni 1} (b_{MM'}[M, \bar{M}'] + \bar{b}[M', \bar{M}])$$

mit

$$\begin{aligned} \Gamma'' &= \{M \subseteq (1, 2, \ldots, \hat{p}, \ldots, \hat{n}) \mid \#M = (p-1)\} \\ b_{MM'} &= (\bar{\tau} - \tau)(a_{Mn,M'p} - a_{Mp,M'n}). \end{aligned}$$

Also ist β vom Typ $(*)$. Sei

$$\lambda_{\beta,LL'} := b_{LL'} + b'_{LL'} \ \forall L \in (\Gamma''_p \ni 1).$$

Nach Induktionsannahme gilt für $M_1 = (1, 2, \ldots, p-1)$, $M'_1 = (p+1, p+2, \ldots, n-1)$ und $\mathcal{M} = \{M \in (\Gamma''_p \ni 1) \mid \exists j \in M' : M' - j = M_1 - 1\}$

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_{\beta,M_1M'_1} = b_{M_1M'_1} + \sum_{\mathcal{M}} \bar{b}_{MM'} \\ &= (\bar{\tau} - \tau)\big(a_{(1,\ldots,p-1,n),(p,p+1,\ldots,n-1)} - a_{(1,\ldots,p),(p+1,\ldots,n)}\big) \\ &\overset{\text{j=(p+1)}}{+} (\tau - \bar{\tau})\big(\bar{a}_{(1,\widehat{p+1},p+2,\ldots,n),(2,\ldots,p,p+1)} - \bar{a}_{(1,p,\widehat{p+1},p+2,\ldots,n-1),(2,\ldots,p-1,p+1,n)}\big) \\ &\overset{\text{j=(...)}}{+} \ldots \\ &\overset{\text{j=(n-1)}}{+} (\tau - \bar{\tau})\big(\bar{a}_{(1,p+1,\ldots,n-2,\widehat{n-1},n),(2,\ldots,p,n-1)} - \bar{a}_{(1,p,\ldots,n-2,\widehat{n-1}),(2,\ldots,p-1,n-1,n)}\big) . \end{aligned}$$

Die j-Indizes bezeichnen der Übersichtlichkeit halber das j aus $\mathcal{M}$, welches dem addierten Term entspricht. Nach Umstellung und Division durch $(\bar{\tau} - \tau) \neq 0$ erhalte die Gleichung

$$a_l = a_r$$

mit

$$\begin{aligned} a_l &:= a_{(1,\ldots,p),(p+1,\ldots,n)} \\ &\overset{\text{j=(p+1)}}{+} \bar{a}_{(1,\widehat{p+1},p+2,\ldots,n),(2,\ldots,p,p+1)} \\ &\overset{\text{j=(...)}}{+} \ldots \\ &\overset{\text{j=(n-1)}}{+} \bar{a}_{(1,p+1,\ldots,n-2,\widehat{n-1},n),(2,\ldots,p,n-1)} \\ a_r &:= a_{(1,\ldots,p-1,n),(p,p+1,\ldots,n-1)} \\ &\overset{\text{j=(p+1)}}{+} \bar{a}_{(1,p,\widehat{p+1},p+2,\ldots,n-1),(2,\ldots,p-1,p+1,n)} \\ &\overset{\text{j=(...)}}{+} \ldots \\ &\overset{\text{j=(n-1)}}{+} \bar{a}_{(1,p,\ldots,n-2,\widehat{n-1}),(2,\ldots,p-1,n-1,n)} . \end{aligned}$$

Nun zurück zu $L_1 = (1,2,\dots,p-1,p)$, $L_2 = (1,2,\dots,p-1,n)$. Nach Definition gilt $L_1 - 1 = (2,\dots,p)$, also $K' - j = (2,\dots,p)$, somit

$$\mathcal{L} = \{(1,p+1,p+2,\dots,\widehat{j},\dots,n-1,n) \mid p+1 \leq j \leq n\}$$

und folglich

$$\lambda_{\alpha,L_1L_1'} = a_{L_1L_1'} + a'_{L_1L_1'} = a_l \overset{\mathrm{j=n}}{+} \bar{a}_{(1,p+1,\dots,n-1,\widehat{n}),(2,\dots,p,n)} \ . \tag{7.23}$$

Analog erhalte $L_2 - 1 = (2,\dots,p-2,p-1,n)$, also $K' - j = (2,\dots,p-2,p-1,n)$, das heißt

$$\mathcal{L} = \{(1,p,p+1,\dots,\widehat{j},\dots,n-2,n-1) \mid p \leq j \leq n-1\}$$

und es gilt

$$\lambda_{\alpha,L_2,L_2'} = a_{L_2L_2'} + a'_{L_2L_2'} = a_r \overset{\mathrm{j=p}}{+} \bar{a}_{(1,\widehat{p},p+1,\dots,n-1),(2,\dots,p,n)} \tag{7.24}$$

Der zweite Summand in (7.23) und (7.24) ist jeweils $\bar{a}_{(1,p+1,\dots,n-1),(2,\dots,p,n)}$ und es folgt

$$\lambda_{\alpha,L_1L_1'} = \lambda_{\alpha,L_2,L_2'}.$$

Nach der Vorbemerkung gilt für beliebige $K, L \in \Gamma_p \ni 1$

$$\lambda_{\alpha,KK'} = \lambda_{\alpha,LL'} = \lambda$$

und mit Lemma 7.2.10 folgt $\alpha + \alpha' = 0$, also Behauptung 7.2.8. $\square$

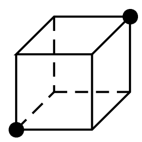
Kapitel 8

Eine abelsche Varietät X mit $H^{2,2}_{\mathbb{Q}}(X) \neq \wedge^2 H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(X)$

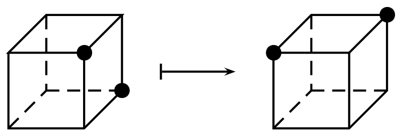
8.1 Grundprinzip

Dieses Kapitel liefert eine abelsche Varietät X mit $\wedge^2 H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(X) \subsetneq H^{2,2}_{\mathbb{Q}}(X)$. Zur Konstruktion wird die Theorie abelscher Varietäten mit komplexer Multiplikation benutzt, um Aussagen über rationale (p,p)-Klassen treffen zu können.
Präsentiert wurde diese Varietät in [11], worin Mumford als Urheber genannt wird. Die grundlegende Idee zur Konstruktion ist folgende:

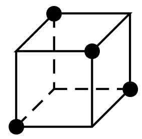
Bemerkung 8.1.1. Nenne eine Teilmenge der Eckpunkte eines Würfels *invariant*, falls nach jeder Drehung, die den Würfel in sich selbst abbildet, immer gleich viele Punkte an der aktuellen Würfeloberseite wie an der Würfelunterseite liegen. Andernfalls nenne die Teilmenge *variant*.
Die zweielementigen invarianten Teilmengen bestehen aus diagonal gegenüberliegenden Würfelpunkten:



Alle anderen zweielementigen Teilmengen sind variant, da die beiden Punkte in einer Würfelebene liegen, die man nach oben oder unten drehen kann:



Es gibt aber eine vierelementige invariante Menge, die nicht als Vereinigung zweielementiger invarianter Mengen geschrieben werden kann:



Diese Tatsache wird später im Hauptsatz benutzt.

8.2 Hauptsatz

Bemerkung 8.2.1. Sei F ein CM-Körper mit $[F:\mathbb{Q}] = 2g$, X eine g-dimensionale abelsche Varietät vom Typ $(F, \varphi_1, \ldots, \varphi_g)$. Die Kohomoloige mit komplexen Koeffizienten $H^{2p}(X, \mathbb{C})$ wird gemäß Abschnitt 6.2 von $2p$-fachen Dachprodukten der $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_g, \bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_g\}$ erzeugt. Sei $\Phi' := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_g\}$, $\Phi'' = \overline{\Phi'}$. Für eine Kohomologieklasse $f \in H^{2p}(X, \mathbb{C})$ definiere den Schnitt

$$f \cap \Phi' := \{\varphi \in \Phi' \mid \varphi \text{ Faktor in } f\}$$

und analog $f \cap \Phi''$.
Beispielsweise gilt für $\Phi' = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_g\}$, $\Phi'' = \{\bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_g\}$ und $f = c\varphi_1 \wedge \varphi_2$ nach Definition $f \cap \Phi' = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ und $f \cap \Phi'' = \emptyset$.

Satz 8.2.2. Falls X vom Typ $(F, \varphi_1, \ldots, \varphi_g)$, L die normale Hülle von F in $\mathbb{C}$, $G = Gal(L/\mathbb{Q})$, so bilden die $f \in H^{2p}(X, \mathbb{C})$, für die

$$\mid \tau f \cap \Phi' \mid = \mid \tau f \cap \Phi'' \mid \forall \tau \in G(L/\mathbb{Q}) \tag{8.1}$$

gilt, eine Basis von $H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$.

Beweis. Da $\mathbb{C}$ flacher $\mathbb{Q}$-Modul, gilt $H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \subseteq H^{2p}(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$. Die Gruppe $Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ operiert deshalb nach Bemerkung 6.2.4 nur auf dem zweiten Faktor des Tensorprodukts. Deshalb gilt für $g = \sum_i f_i \otimes c_i \in H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$:

$$\sigma(g) = \sum_i f_i \otimes \sigma(c_i)$$

Da jedes $f_i \in H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(X)$ und $\sigma(c_i) \in \mathbb{C}$, folgt $\sigma(g) \in H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$. In jedem $\sigma(g)$ sind nach der Charakterisierung der (p,p)-Klassen im Abschnitt 6.2 also p der φ_i und p der $\bar{\varphi}_i$ enthalten, also ist die Gleichung (8.1) für alle σ erfüllt.
Sei umgekehrt $f \in H^{2p}(X, \mathbb{C})$ gegeben und sei Gleichung (8.1) erfüllt. Wähle eine Basis $\{u_1, \ldots, u_s\}$ von L über $\mathbb{Q}$, mit $s = [L:\mathbb{Q}]$. Setze für $i = 1, \ldots, s$

$$f_i := \sum_{\tau \in G(L/\mathbb{Q})} \tau(u_i)\tau f \ .$$

Es gilt $\sigma f_i = f_i \; \forall \sigma \in Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$, da jedes Element aus $Aut(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ ein Element der Galoisgruppe induziert und die Translation mit einem Element der Galoisgruppe eine transitive Operation ist. Also $f_i \in H^{2p}(X, \mathbb{Q})$. Es gilt ferner $\tau(f) \in H^{p,p}(X) \; \forall \tau \in G$, da $f \in H^{2p}(X, \mathbb{C})$ und Gleichung (8.1) die (p,p)-Eigenschaft liefert. Erhalte folglich $f_i \in H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(X)$.
Nach Lemma 5.1.1 gilt

$$det \begin{pmatrix} \tau_1(u_1) & \cdots & \tau_s(u_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_1(u_s) & \cdots & \tau_s(u_s) \end{pmatrix} \neq 0 \; ,$$

somit ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1(u_1) & \cdots & \tau_s(u_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_1(u_s) & \cdots & \tau_s(u_s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau_1 f \\ \vdots \\ \tau_s f \end{pmatrix}$$

nach $\tau_i f$ lösbar. Erhalte somit für alle $\tau \in G(L/\mathbb{Q})$

$$\tau f \in H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C},$$

denn jedes τf ist nach Lösung des Gleichungssystems eine $\mathbb{C}$-Linearkombination der $f_i \in H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(X)$. Insbesondere gilt für $\tau = id_L$ auch $f \in H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$. $\square$

8.3 Gruppentheoretische Vorbereitungen

Um Satz 8.2.2 geeignet auf die Vorbemerkung in Abschnitt 8.1 anzuwenden, sind folgende Schritte nötig:

(i) Konstruiere einen Körper L mit Galoisgruppe $G = S_4 \times \{id, ^-\}$.

(ii) Identifiziere G mit den Drehungen eines Würfels und der Punktspiegelung durch den Würfelmittelpunkt.

(iii) Wähle einen geeigneten CM-Unterkörper F von L.

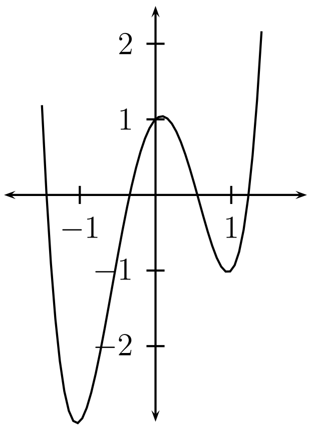
(iv) Identifiziere $\wedge^p Hom_{\mathbb{Q}}(F, L)$ mit einer geeigneten Menge aus p Würfeleckpunkten.

8.3.1 Konstruktion von L und G

Gesucht ist ein Körper L mit $Gal(L/\mathbb{Q}) \simeq S_4 \times \{id, ^-\}$. Diese Galoisgruppe wird im nächsten Schritt mit dem Produkt der Würfeldrehungen, die den Würfel auf sich selbst abbilden, und der Punktspiegelung im Würfelmittelpunkt identifiziert.

Lemma 8.3.1. Das Polynom $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + x + 1$ hat nur reelle Nullstellen. Sei L_0 der Zerfällungskörper von f, so gilt $G_{L_0} := Gal(L_0/\mathbb{Q}) = S_4$.

Beweis. Betrachte den Graphen von f:



Es gilt für die Funktionswerte von f:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	23	-3	1	-1	27

somit existieren vier Vorzeichenwechsel, die nach dem Zwischenwertsatz vier reellen Nullstellen entsprechen.
Die Erweiterung ist separabel, da $char(\mathbb{Q}) = 0$ und normal, da L_0 der Zerfällungskörper von f ist. Also ist die Erweiterung galoissch.
Berechne nun die Galoisgruppe $Gal(L_0/\mathbb{Q})$. Benutze dazu das in Ch. VI §2 Example 7 beschriebene Verfahren:
Hierbei werden folgende beiden Fakten benutzt:

(i) Sei p eine Primzahl, $f \in \mathbb{Z}[X]$. Die Galoisgruppe von f mod p über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist zyklisch und wird vom Frobenius-Automorphismus erzeugt, der auf den Nullstellen jedes irreduziblen Faktors von f mod p zyklisch operiert.

(ii) Sei p eine Primzahl, $f \in \mathbb{Z}[X]$. Falls der Leitkoeffizient von f nicht von p geteilt wird und f modulo p in verschiedene irreduzible Faktoren zerfällt, enthält die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$ ein Element vom gleichen Permutationstyp wie die Frobenius-Abbildung in der Galois-Gruppe von f mod p über $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Es gilt: $f(x)$ mod $5 = 3(x^2+3x+4)(x^2+2x+3)$. Die Irreduzibilität der beiden Faktoren folgt elementar: Wären sie reduzibel, so spalteten sie jeweils einen Linearfaktor ab, hätten also eine Nullstelle in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Eine Wertetabelle liefert:

x	0	1	2	3	4
x^2+3x+4	3	4	2	2	4
x^2+2x+3	3	1	1	3	2

Dann folgt mit Fakt (i): Der Frobenius operiert durch eine Permutation vom Zykel-Typ (2)(2). Dies hat Ordnung zwei, also ist die Galois-Gruppe von f über $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ zyklisch von Ordnung zwei.
Ferner gilt: $f(x)\ mod\ 11 = 3(x+3)(x^3+8x^2+7x+5)$. Der rechte Faktor müsste, falls reduzibel, einen Linearfaktor abspalten, also eine Nullstelle in $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ haben. Es gilt jedoch:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^3+8x^2+7x+5	5	10	4	4	5	2	1	8	7	4	5

Fakt (i) liefert dann den Zykel-Typ (1)(3) des Frobenius, also ist die Galois-Gruppe von f über $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ zyklisch von Ordnung drei.
Nach Fakt (ii) enthält die Galois-Gruppe von f über $\mathbb{Q}$ ein Produkt zweier 2-Zykel und einen 3-Zykel. Der 3-Zykel erzeugt eine Untergruppe $G_i = \{g \in S_4 \mid g(i) = i\}$ in S_4, die nicht das Produkt der 2-Zykel enthält. Betrachtet man die Untergruppen der S_4, so stellt man fest, dass es zwischen G_i und S_4 keine echte Untergruppe gibt, also muss die Galois-Gruppe schon gleich S_4 sein.
Da die Nullstellen von f alle reell sind und die Galoisgruppe die Permutationsgruppe ist, liegen alle Einbettungen von L_0 schon in $\mathbb{R}$. Der Körper L_0 ist also total reell. $\square$

Sei $L_1 = \mathbb{Q}(\imath)$ der Zerfällungskörper von $e(x) := (x^2+1)$ und

$$G_{L_1} := Gal(L_1/\mathbb{Q}) = \{^-, id\}.$$

Als Zerfällungskörper ist L_1 normal. Da L_0 aus Lemma 8.3.1 separabel, kann ein primitives Element α mit $L_0 = \mathbb{Q}(\alpha)$ gewählt werden. Sei nun $L = \mathbb{Q}(\alpha, \imath)$ der Zerfällungskörper von $f(x) \cdot e(x)$ und $^-$ die komplexe Konjugation. Mit $L_0 \cap L_1 = \mathbb{Q}$ gilt nach [4] Chapter VI §1 Theorem 1.14:

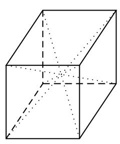
$$G = Gal(L/\mathbb{Q}) = G_{L_0} \times G_{L_1} = S_4 \times \{^-, id\},$$

somit $\mid G \mid = 48$.

Bemerkung 8.3.2. Als total imaginäre quadratische Erweiterung eines total reellen Zahlkörpers ist L ein CM-Körper.

8.3.2 Identifikation geeigneter Würfel-Automorphismen mit G

Bemerkung 8.3.3. Die Gruppe S_4 ist isomorph zu den Drehungen des Würfels, die den Würfel wieder in sich selbst abbilden. Der Isomorphismus erfolgt über die Eckpunktdiagonalen durch den Würfelmittelpunkt. Diese vier Diagonalen sind die vier zu permutierenden Elemente.



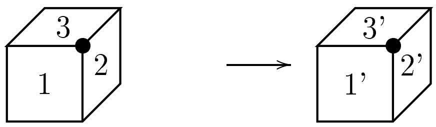
Bemerkung 8.3.4. Die Gruppe $S_4 \times \{id, ^-\}$ kann aufgrund $^{-2} = id$ als

$$\{\text{Drehungen}\} \times \{\text{Punktspiegelung im Mittelpunkt}, id\}$$

aufgefasst werden: Fasse wiederum die Diagonalen als die Nullstellen von f auf. Die Punktspiegelung ändert nichts an den Diagonalen, invertiert aber den Würfel. Die Spiegelung der Eckpunkte entspricht dann der komplexen Konjugation.

8.3.3 Konstruktion von F

Identifiziere wieder G mit dem Produkt der Würfeldrehungen, die den Würfel auf sich selbst abbilden, und der Punktspiegelung im Würfelmittelpunkt.
Fixiere einen Eckpunkt A auf der Oberseite des Würfels. Sei H die Untergruppe von G, die den Eckpunkt A festlässt und sei $F = L^H$ der Fixkörper von H. Wie im unteren Bild skizziert, sind die Elemente aus H schon eindeutig durch die Aktion auf den an A grenzenden Würfelflächen bestimmt. Durch Spiegelung von A im Mittelpunkt und Drehung wiederum nach A erhalte die Elemente von H, die eine andere Reihenfolge haben als die nur gedrehten Elemente. Somit sind alle Permutationen der Flächen $(1, 2, 3)$ möglich und H ist isomorph zu S_3.



Es gilt $H \simeq S_3$ ($\Rightarrow \mid H \mid = 6$), also $[L : F] = 6$ nach dem Satz von Artin und $[F : \mathbb{Q}] = 8$.

Bemerkung 8.3.5. Sei $\{4\}$ die Diagonale durch A und den Würfelmittelpunkt. Die Untergruppe H setzt sich aus folgenden Elementen zusammen:

$(1234, id)$	$(1324, ^-)$
$(3124, id)$	$(2134, ^-)$
$(2314, id)$	$(3214, ^-)$

Zur Wohldefiniertheit sei noch bemerkt, dass die „konjugierten“ Elemente immer aus einer ungeraden Anzahl von Transpositionen, die „nicht konjugierten“ jedoch aus einer geraden Anzahl bestehen. Der Isomorphismus zu S_3 ist dann offensichtlich.

Lemma 8.3.6. Der Fixkörper $F := L^H$ ist ein CM-Körper.

Beweis. Zeige: Es gibt einen Automorphismus $\varrho\mid_F: F \to F$, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\varphi|_F"'] \arrow[d, "\rho"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "^-"] \\ F \arrow[r, "\varphi|_F"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd} \tag{8.2}$$

für alle Einbettungen $\varphi : F \to \mathbb{C}$ kommutiert und F ist nicht Fixkörper von $\rho\mid_F$. Nach Bemerkung 8.3.2 ist L ein CM-Körper. Sei $\rho : L \to L$ der Automorphismus, der der komplexen Konjugation entspricht. Da L eine galoissche Erweiterung, reicht es, anstatt (8.2) die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow[\sigma|_F]{} & L \\ {\scriptstyle\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ F & \xrightarrow[\sigma|_F]{} & L \end{array} \tag{8.3}$$

für alle $\sigma \in Gal(L/\mathbb{Q})$ zu zeigen.
1. Existenz von $\rho\mid_F$: Es ist zu zeigen, dass die Einschränkung

$$\rho\mid_F : F \to L$$

schon in F liegt. Zeige dazu $\rho\mid_F (F) = L^H = F$:

$$\begin{aligned} \rho\mid_F (F) = L^H \quad &\Leftrightarrow \quad \gamma\rho\alpha = \rho\alpha \quad \forall\gamma \in H, \alpha \in F \\ &\overset{\rho^2=id}{\Leftrightarrow} \quad \rho\gamma\rho\alpha = \alpha \quad \forall\gamma \in H, \alpha \in F \\ &\overset{F=L^H}{\Leftrightarrow} \quad \rho\gamma\rho \in H \quad \forall\gamma \in H \end{aligned}$$

Die letzte Bedingung ist mit Bemerkung 8.3.5 klar: Sei $\gamma = (\sigma, a) \in H$. Nach Definition gilt $\rho = (id, ^-)$ und erhalte

$$\rho\gamma\rho = (id \circ \sigma \circ id, \bar{\bar{a}}) = (\sigma, a) = \gamma \in H$$

Es folgt durch die Äquivalenzen $\rho\mid_F (F) = L^H$, also existiert der Automorphismus

$$\rho\mid_F : F \to F.$$

2. Kommutativität des Diagrammes in (8.3): Zu zeigen bleibt:

$$\sigma\rho(\alpha) = \rho\sigma(\alpha) \ \forall\alpha \in F, \sigma \in Gal(L/\mathbb{Q})$$

oder äquivalent, da $\rho = \rho^{-1}$ und $Gal(L/\mathbb{Q})$ Gruppe:

$$\begin{aligned} &\sigma^{-1}\rho^{-1}(\alpha) = \rho^{-1}\sigma^{-1}(\alpha) \ \forall\alpha \in F, \sigma \in Gal(L/\mathbb{Q}) \\ \overset{\rho^{-1}=\rho}{\Leftrightarrow} \quad &\sigma\rho\sigma^{-1}\rho(\alpha) = \alpha \ \forall\alpha \in F, \sigma \in Gal(L/\mathbb{Q}) \\ \Leftrightarrow \quad &\sigma\rho\sigma^{-1}\rho \in H \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt, da für $\sigma = (\tau, p)$, $\sigma^{-1} = (\tau^{-1}, p^{-1})$, $\rho = (id, ^-)$ gilt:

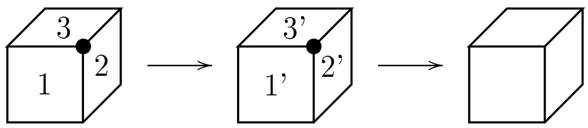
$$\sigma\rho\sigma^{-1}\rho = (\tau \circ id \circ \tau^{-1} \circ id, id) \in H$$

Die Identität im zweiten Faktor ergibt sich, da diese Gruppe kommutativ ist. Also folgt die Kommutativität in Diagramm (8.3).
3. Der Körper F ist nicht Fixkörper von $\rho\mid_F$: Da $(id, ^-) \notin H$ folgt: Der Automorphismus $(id, ^-)$ induziert einen nichttrivialen Automorphismus von F. Also gilt $F \neq F^{^-|_F}$. Es folgt die CM-Eigenschaft nach Bemerkung 4.1.7. $\square$

8.3.4 Charakterisierung von $\wedge^n Hom_{\mathbb{Q}}(F, L)$

Wie schon gesehen, gilt $Gal(L/\mathbb{Q}) \simeq \{\text{Drehungen}\} \times \{\text{Punktspiegelung}, id\}$. Nach Definition gilt $\varphi(\alpha) = \alpha\ \forall \alpha \in F$, $\varphi \in H$. Somit habe ein Diagramm:

$$L \xrightarrow{\varphi \in H} L \xrightarrow{\psi} L$$



$$F \xrightarrow{id_F} F \xrightarrow{\psi} L$$

Da ψ beliebig, kann A auf einen beliebigen Eckpunkt abgebildet werden. Nach obigem Diagramm induzieren ψ und $\psi \circ \varphi$ die gleiche Abbildung auf F. Eine Abbildung von F nach L ist demnach eindeutig durch den Bildpunkt des zur Konstruktion von H gewählten Punktes A bestimmt.

Bemerkung 8.3.7. Da $[F : \mathbb{Q}] = 8$ folgt $dim_{\mathbb{Q}} Hom_{\mathbb{Q}}(F, L) = 8$. Die Einbettungen $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_8\}$ von F nach $\mathbb{C}$ bilden eine $\mathbb{Q}$-Basis von $Hom_{\mathbb{Q}}(F, L)$.
Betrachte ein Element

$$\alpha = \underbrace{\varphi_i \wedge \cdots \wedge \varphi_j}_{p\text{-mal}} \in \wedge^p Hom_{\mathbb{Q}}(F, L) \overset{\text{Bem. 6.2.2}}{\simeq} H^p(X, \mathbb{C}).$$

Nach Identifikation der $\varphi_1, \ldots, \varphi_8$ mit den Eckpunkten des Würfels kann α als p-Tupel von Würfeleckpunkten aufgefasst werden. Da im Dachprodukt für $\alpha \neq 0$ kein φ_k, $1 \leq k \leq 8$, doppelt auftreten kann, identifiziere α mit einem Tupel paarweise verschiedener Würfeleckpunkte. Da ferner die Operation von

$$Gal(L/\mathbb{Q}) \simeq \{\text{Drehungen}\} \times \{\text{Punktspiegelung im Mittelpunkt}, id\}$$

auf dem Dachprodukt nach Bemerkung 6.2.4 elementweise erfolgt, wird jeder Würfeleckpunkt in dem Tupel auf die gleiche Weise gedreht und gespiegelt. Daher kann ein Element aus $\wedge^p Hom_{\mathbb{Q}}(F, L)$ auch als die verschiedenen Punkte *eines* Würfels aufgefasst werden und die Operation von $Gal(L/\mathbb{Q})$ ist dann die Drehung und Spiegelung dieses Würfels. Satz 8.2.2 identifiziert somit $H^{p,p}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ mit den in Bemerkung 8.1.1 eingeführten $2p$-elementigen *invarianten* Teilmengen von Würfeleckpunkten.

8.4 Anwendung des Satzes

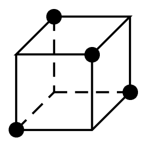
Bemerkung 8.4.1. Seien V_1, V_2 zwei $\mathbb{Q}$-Vektorräume und $V_1 \simeq V_2$, so gilt trivialerweise $V_1 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq V_2 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ und die negierte Aussage:

$$V_1 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \not\simeq V_2 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \Rightarrow V_1 \not\simeq V_2.$$

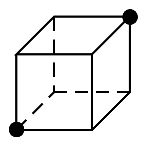
Satz 8.4.2. Es gibt eine abelsche Varietät X mit der Eigenschaft:

$$H^{2,2}_{\mathbb{Q}}(X) \neq \wedge^2 H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(X)$$

Beweis. Sei F wie in Abschnitt 8.3.3 konstruiert und X eine abelsche Varietät vom Typ $(F, \varphi_1, \ldots, \varphi_4)$. Nach allen Identifikationen liefert Satz 8.2.2 ein Element $\alpha_{ex} \in H^{2,2}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$,



das nicht in $\wedge^2(H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$ liegt, sonst wäre es eine Vereinigung von Punktmengen der Form:



Da gilt

$$\wedge^2(H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}) \simeq (\wedge^2 H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(X)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

folgt nach Bemerkung 8.4.1 $\wedge^2 H^{1,1}_{\mathbb{Q}}(X) \neq H^{2,2}_{\mathbb{Q}}(X)$. $\square$

Bemerkung 8.4.3. Die Existenz der in Satz 8.4.2 geforderten abelschen Varietät folgt aus der Konstruktion in Kapitel 5. Für deren Einfachheit verweise ich auf [11].

Literaturverzeichnis

[1] S. Bosch: *Algebra*, Springer Verlag, Berlin 1999

[2] M. J. Greenberg, J. R. Harper: *Algebraic Topology A First Course*, Westview Press, Boulder Hill 1981

[3] P. Griffiths, J. Harris: *Principles of algebraic geometry*, John Wiley & Sons, New York 1994

[4] S. Lang: *Algebra*, Springer Verlag, Berlin 2002

[5] S. Lang: *Algebraic Number Theory*, Addison Wesley, London 1970

[6] S. Lang: *Complex Multiplication*, Springer Verlag, Berlin 1983

[7] H. Lange, C. Birkenhake: *Complex Abelian Varieties*, Springer Verlag, Berlin 1992

[8] J. S. Milne: *Abelian Varieties*, www.math.lsa.umich.edu/~jmilne/, Michigan 1998

[9] T. Murasaki: *On rational cohomology classes of type (p,p) on an Abelian variety*, Science Report Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect A 10 (1969), S. 66-74

[10] J. Neukirch: *Algebraische Zahlentheorie*, Springer Verlag, Berlin 1992

[11] H. Pohlmann: *Algebraic cycles on abelian varieties of complex multiplication type*, Annals of Mathematics (2) 88 (1968), S. 161-180

[12] B. L. Waerden: *Algebra Volume I*, Springer Verlag, Berlin 2003

[13] B. L. Waerden: *Algebra Volume II*, Springer Verlag, Berlin 2003

[14] F. W. Warner: *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer Verlag, Berlin 1983 (Reprint, ursprüngliche Publikation 1971)

Erklärung

Hiermit erkläre ich, Johann Schuster, dass ich die vorliegende Diplomarbeit zum Thema

Rationale (p, p)-Klassen in der Kohomologie komplexer abelscher Varietäten

selbst und ausschließlich mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt habe.

Landshut, 27. November 2004

....

Johann Schuster